第一章、事件与概率

§1.1. 随机现象与统计规律性

- 不确定性.
- 例1. 投掷一枚硬币, 出现"正面朝上".

  例2. 投掷一枚色子, 出现"大".

  例3. 投掷两枚硬币, 出现"一正一反".
- 随机试验(random trial), 不是"实验".
- 事件(event). 常用大写字母$A, B, C, \cdots$ 表示.

  例1. $A = \{H\}$

  例3. $A = \{HT, TH\}$
- 样本空间Ω: 所有可能的试验结果组成的集合.

  例1. $\Omega = \{H, T\}$

  例3. $\Omega = \{HT, HH, TH, TT\}$

概率$P(A)$ 的两个含义, 它们都不是概率的定义!

- 含义一、 事件的频率(客观).
- 例. 投n 次硬币, 观察到频率$F_{n,H} := \frac{n_H}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$.

实 验 者	掷硬币次数	出现正面次数	频 率
蒲 丰	4 040	2 048	0.506 9
皮 尔 逊	12 000	6 019	0.501 6
皮 尔 逊	24 000	12 012	0.500 5

- 例. 观察到字母频率的稳定性.
- §5.4 强大数定律. 数值模拟.
- 性质: $F_n(A) \geqslant 0$; (1.1.1) $F_n(\Omega) = 1$; (1.1.2)

$$F_n(A) + F_n(B) = F_n(A+B). \quad (1.1.3)$$

- 含义二、事件的置信度(主观).
- 经验.
- 假设, 预测, 判断.

  (单次试验中)大概率事件发生, 小概率事件不发生.
- 权重.

§1.2 样本空间与事件

- 样本(sample)/点: 一个试验结果, ω.
- 样本空间/全集: 所有试验结果, Ω.
- 事件(event)/子集: 部分试验结果, A, B,..., 性质, Ω, $\varnothing$.
- 事件A 发生: (本次)试验结果 $\omega \in A$.
- 概率(probability): 可能性, $P(A)$.
- 目标: 已知一些事件(的概率), 计算某事件(的概率).

- “交”, $A \cap B$, AB :

  事件A 发生且事件B 发生.

  事件同时发生, 性质都被满足.

- “并”, $A \cup B$:

  事件A 发生或事件B 发生,

  ω 满足性质A 或性质B.

- $A \subseteq B$: 若$\omega \in A$, 则$\omega \in B$.

  $A = B$: $A \subseteq B$ 且$A \supseteq B$.

- 不交, $AB = \varnothing$: 不相容, 互斥.

  此时, $A \cup B$ 也记为$A + B$.

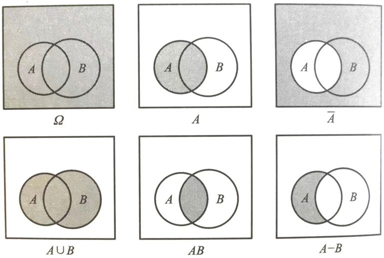


图 1.2.1　事件运算

- "补", $\bar{A} = A^c = \{\omega : \omega \notin A\}$,

  逆事件, 对立事件,

  事件A 不发生, 性质A 被否定.

- "差": $A \backslash B := A\bar{B}$.

  当$B \subseteq A$ 时, 记为$A - B$.

- 交换律、结合律、分配律.

- 对偶律: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

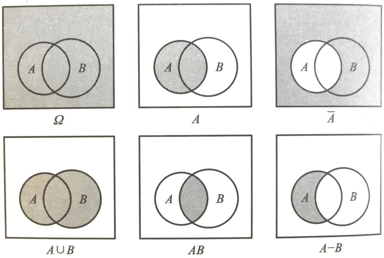


图 1.2.1 事件运算

- 有限交: $A_1,\cdots,A_n$ 全都发生.

$\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1\cdots A_n = \{\omega : \omega\in A_i,\ \forall\ 1\leqslant i\leqslant n\}.$

- 有限并: $A_1,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生.

$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n = \{\omega : \exists\ 1\leqslant i\leqslant n \text{ 使得} \omega\in A_i\},$

- 可列交: 所有事件A_i, $i\geqslant 1$ 都发生.

$\bigcap_{i=1}^\infty A_i = \bigcap_i A_i = A_1A_2\cdots := \{\omega : \omega\in A_i\ \forall i\}.$

- 可列并: 存在某个事件A_i 发生.

$\bigcup_{i=1}^\infty A_i = \bigcup_i A_i = A_1\cup A_2\cup\cdots := \{\omega : \exists\ i \text{ 使得} \omega\in A_i\},$

- 例. $A_i = [\frac{1}{i}, 1]$, 则 $\bigcup_i A_i = (0, 1]$.
- 例. $A_i = [0, \frac{1}{i}]$, 则 $\bigcap_i A_i = \{0\}$; $A_i = (0, \frac{1}{i}]$, 则$\bigcap_i A_i = \varnothing$.
- 若$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots$, 则

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_n B_n := \bigcup_n B_n.$$

- 若$B_1 \supseteq B_2 \supseteq \cdots$, 则

$$\lim_{n\to\infty} B_n = \lim_n B_n := \bigcap_n B_n.$$

- $\lim_n \bigcup_{i=1}^n A_i = \bigcup_i A_i$, $\quad \lim_n \bigcap_{i=1}^n A_i = \bigcap_i A_i$.
- 交换律、结合律、分配律、对偶律:

$$(\bigcup_i A_i)C = \bigcup_i (A_i C); \quad (\bigcap_i A_i)C = \bigcap_i (A_i C).$$

$$\overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \overline{A_i}, \quad \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \overline{A_i}.$$

§1.3 古典概型

- 有限样本空间: $\Omega=\{1,\cdots,n\}$. 基本事件: $\{i\}$.

  概率: $P(A):=\sum_{i\in A}p_i$; 其中$p_i\geqslant 0,\ \forall i$; $\sum_i p_i=1$.

  含义: 权分配, p_i, $P(\{i\})$, 不要写$P(i)$.
- 古典概率模型: $p_i=\frac{1}{n}$. 事件A 的概率定义为 $P(A):=\frac{|A|}{|\Omega|}$.
- “人人平等”的原则.
- 不重不漏地数数: 乘法/加法原则, 排列, 组合.

$$A_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1),$$

$$C_n^m=\binom{n}{m}=\frac{A_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

- 两类模型: 一、抽球模型, 二、放球模型.

1. 不放回抽样

例1.3.5. a 个黑球, b 个白球. 随机地一个一个取出来, 令 $A_k=$"第k 个是黑球". 求: $P(A_k)$.

模型1:

- 将球编号, 黑球: $1\sim a$, 白球: $a+1\sim a+b$.
- 样本: $\omega=(i_1,\cdots,i_{a+b})$: $1\sim a+b$ 的全排.
  样本空间: $|\Omega|=(a+b)!$.
  令 $A_k:=\{\omega:i_k\leqslant a\}$. 求$P(A_k)$.

- 抽签与顺序无关:

$$\psi : \Omega \to \Omega$$

$$\omega \mapsto \hat{\omega} = (i_k, i_1, \cdots, i_{k-1}, i_{k+1}, \cdots, i_n). \text{ 一对一}.$$

- 一般化：$\vec{k} = (k_1, k_2, \cdots, k_n)$ 是全排:

$$\omega \mapsto (i_{k_1}, i_{k_2}, \cdots, i_{k_{a+b}}). \text{ 一对一}.$$

- 计算: $|A_k|$, 其中$A_k = \{\omega : i_k \leqslant a\}$.

$$|A_k| = |A_1| = a(a+b-1)!, \quad \text{故} P(A_k) = \frac{a}{a+b}.$$

模型2:

- 用1 表示黑球(a 个), 0 表示白球(b个).

  样本: $\tilde{\omega}$ = 由a 个1 和b 个0 组成的“0-1字符串”,

  样本空间: $|\tilde{\Omega}| = C_{a+b}^{a}$.

- $\varphi : \Omega \to \tilde{\Omega}$, $a! \cdot b!$ 对1 的映射,

  $\omega \in A_k$ iff $\varphi(\omega) \in \tilde{A}_k$ = 第k 个字符为1 的所有字符串.

- 计算:

$$|\tilde{A}| = C_{a+b-1}^{a-1}, \quad 故 \tilde{P}(\tilde{A}) = \frac{a}{a+b}.$$

- 模型1、模型2结果一样:

$$P(A) = |A_k|/|\Omega| = (a!b!|\tilde{A}_k|)/(a!b!|\tilde{\Omega}|) = \tilde{P}(\tilde{A}_k).$$

例1.3.6. a 个黑球, b 个白球. 随机地一个一个取出来,
令$B=$“前n 个中恰有k 个黑球”. 求: $P(B)$.

- 模型1: $|\Omega|=(a+b)!$.

$$|B|=\frac{n!}{k!(n-k!)}\frac{a!}{(a-k)!}\frac{b!}{(b-(n-k))!}(a+b-n)!$$
$$=n!(a+b-n)!C_a^kC_b^{n-k}.$$
$$P(B)=C_a^kC_b^{n-k}/C_{a+b}^n.$$

- 模型3: 随机地(一次性)取n 个. $|\hat{\Omega}| = C_{a+b}^n$. $|\hat{B}| = C_a^k C_b^{n-k}$.

$$\hat{P}(\hat{B}) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

- 模型1、模型3一致:
  - $n!(a+b-n)!$ 对1 的映射,

$$\hat{\varphi}: \Omega \to \hat{\Omega}, \quad \omega = (i_1, \cdots, i_{a+b}) \mapsto \hat{\omega} := \hat{\varphi}(\omega) = \{i_1, \cdots, i_n\}.$$

  - $\omega \in B$ iff

$$\hat{\omega} \in \hat{B} = \{\hat{\omega} : |\hat{\omega} \cap \{1, \cdots, a\}| = k\}.$$

  - $\hat{\omega} \in \hat{B}$ iff $\hat{\omega} = \{a_1, \cdots, a_k; b_1, \cdots, b_{n-k}\}$. 故$|\hat{B}| = C_a^k C_b^{n-k}$.

$$P(B) = \hat{P}(\hat{B}) = \frac{C_a^k C_b^{n-k}}{C_{a+b}^n}.$$

2. 放回抽样

例1.3.6. a 个黑球, b 个白球. 每次随机地取一个, 然后放回, 令$C=$"前n 个(次)中恰有k 个黑球". 求: $P(C)$.

<u>模型4</u>:

- 将球编号, 黑球: $1\sim a$, 白球: $a+1\sim a+b$.
- 样本空间: $|\Omega|=(a+b)^n$, 样本:
$$\omega=(i_1,\cdots,i_n):1\leqslant i_k\leqslant a+b,\ \ \forall k.$$
- 计算:
$$|C|=C_n^k a^k b^{n-k},\quad P(C)=C_n^k\left(\frac{a}{a+b}\right)^k\left(\frac{b}{a+b}\right)^{n-k}.$$
- 例. 投公平硬币n 次, 求$\check{C}=$"见到k 个正面"的概率.

  $\check{\omega}=$ 长为n 的H-T 字符串, $|\check{\Omega}|=2^n$, $|\check{C}|=C_n^k$, $(p=\frac{1}{2})$.

例: 将两个球随机放入两个盒子中.

- 对比.

模型一	HH	TT	HT	TH
球可分辨	$\lfloor \otimes \oplus \rfloor \lfloor \quad \rfloor$	$\lfloor \quad \rfloor \lfloor \otimes \oplus \rfloor$	$\lfloor \otimes \rfloor \lfloor \oplus \rfloor$	$\lfloor \oplus \rfloor \lfloor \otimes \rfloor$

(翻译: 投两枚硬币, 盒子H 与盒子T)

模型二	001	100	010
球不可分辨	$\lfloor \odot \odot \rfloor \lfloor \quad \rfloor$	$\lfloor \quad \rfloor \lfloor \odot \odot \rfloor$	$\lfloor \odot \rfloor \lfloor \odot \rfloor$

- 物理: 考虑将r个球放入n个盒子中.

  Maxwell-Boltzmann 统计(模型一):

  $\Omega = \{(n_1, \cdots, n_r) : 1 \leqslant n_i \leqslant n, 1 \leqslant i \leqslant r\}$

  Bose-Einstein 统计(模型二):

  $\Omega' = \{(r_1, r_2, \cdots, r_n) : r_1 \geqslant 0, \cdots, r_n \geqslant 0, \sum_{i=1}^{n} r_i = r\}$

1. 球可分辨

例1.3.4. 有n 个球, 随机地将每个球放入N 个格子之一, $A =$ “在$1 \sim n$ 号格子中各有一个球”, $B =$“每个球独占一格”. 求$P(A)$, $P(B)$. $(N \geqslant n)$

- 建模: 将球编号, 盒子也编号, $\omega = (i_1, \cdots, i_n)$, $|\Omega| = N^n$.
- $|A| = n!$, $|B| = C_N^n n! = \frac{N!}{(N-n)!}$, 故

$$P(A) = \frac{n!}{N^n}, \quad P(B) = \frac{N!}{(N-n)!N^n}.$$

- 生日问题: $N = 365$, $p_n =$ 有同生日的概率$(= 1 - P(B))$.

n	5	10	20	23	30	40	60
p_n	0.027	0.117	0.411	0.507	0.706	0.891	0.994

习题一、37. n 个学生, N 张考签, 依次抽取考签并放回. 记$A=$ "有未被抽到的考签", 求$P(A)$.

- 翻译: 将n 个球随机放入N 个盒子, $A=$ "有空盒子".
- $A_i=$"第i 个盒子空", $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
- $|A_i|=(N-1)^n$, $|A_1\cdots A_i|=(N-i)^n$.
- 若当(Jordan)公式:

$$\left|\bigcup_i A_i\right|=\sum_i |A_i|-\sum_{i<j}|A_iA_j|+\sum_{i<j<k}|A_iA_jA_k|\cdots.$$

- $P(A)=(C_N^1(N-1)^n-C_N^2(N-2)^n+\cdots)/N^n$.

2. 球不可分辨

习题一、21. 从编号$1, 2, \cdots, N$ 的N 个球从中有放回地摸了n 次球, 每次一个, $A =$“ 所见号码上升”, 求$P(A)$.

- $|\Omega| = N^n$, $A =$?
- A: 将n 个不可分辨的球放入N 个盒子, (例. $n = 6$, $N = 3$)

111233	$\lfloor \odot\,\odot\,\odot \,\|\, \odot \,\|\, \odot\,\odot \rfloor$	00010100
222233	$\lfloor \;\;\|\, \odot\,\odot\,\odot\,\odot \,\|\, \odot\,\odot \rfloor$	10000100

- $|A| = C^n_{n+N-1}$, (有重复的组合数, P21 (4)), 故

$$P(A) = C^n_{n+N-1}/N^n$$

习题一、15. m 个男孩和n 个女孩随机沿着圆桌坐下. $(n \leqslant m)$ $A=$"任意两个女孩都不相邻", 求$P(A)$.

- 初选模型: 全部编号, $\omega = 1 \sim n+m$ 的全排, $|\Omega| = (m+n)!$. 没有用!
- 圆桌: 先为第$m+n$ 号男孩挑座位(记为ω_0 号).
- 然后, 混排: 女孩全排, 男孩全排, 挑座位给女孩.
- $\omega = (\omega_0, \omega_g, \omega_b, \tilde{\omega})$,

$$(m+n)! = (m+n) \cdot n! \cdot (m-1)! \cdot C_{n+m-1}^{n}.$$

- 简化模型: 男孩=盒子, $|\tilde{\Omega}| = C_{m-1+n}^{n}$.
- $\omega \in A$ iff $\tilde{\omega} \in \tilde{A}=$"每球独占一盒", $|\tilde{A}| = C_m^n$,

$$P(A) = \tilde{P}(\tilde{A}) = \frac{C_m^n}{C_{m+n-1}^n} = \frac{m!(m-1)!}{(m-n)!(n+m-1)!}.$$

- 先为第n 号女孩挑座位(记为ω_0 号).
- $n-1$ 个女孩、m 个男孩的混排.
- $\omega=(\omega_0,\omega_g,\omega_b,\tilde{\omega})$,

$$(m+n)!=(m+n)\cdot(n-1)!\cdot m!\cdot C_{n+m-1}^{n-1}.$$

- 简化模型: 女孩=盒子, $|\hat{\Omega}|=C_{n-1+m}^{n-1}$.
- $\omega\in A$ iff $\hat{\omega}\in\hat{A}=$“没有空盒子”.
- n 盒中放$m-n$ 球的放法, $|\hat{A}|=C_{n-1+m-n}^{n-1}$,

$$P(A)=\hat{P}(\hat{A})=\frac{C_{m-1}^{n-1}}{C_{n+m-1}^{n-1}}=\frac{m!(m-1)!}{(m-n)!(n+m-1)!}.$$

例. 5 位男孩, 4 位女孩, 混排.

记B = “甲(男孩)排在所有女孩之前”, 求$P(B)$.

- 建模: 女孩编号$1\sim 4$; 男孩编号$5\sim 9$, 其中, 甲为5 号.
- 模型1: $|\Omega| = 9! = 4! \times 5! \times C_9^4$,

$$\omega = 835261497 \mapsto (3214;\ 85697;\ 010101100).$$

- 模型2:

$$\omega = 835261497 \mapsto (\hat{\omega} = 35214;\ 8697;\ 011101100).$$

- 简化模型: $\omega \mapsto \hat{\omega}$,

$$B \to \hat{B} = \{5****\}, \quad P(B) = \hat{P}(\hat{B}) = \frac{1}{5}.$$

古典概型$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}, \forall A \subseteq \Omega$ 的基本性质:

- 非负性: $P(A) \geqslant 0$.
- 规范性: $P(\Omega) = 1$, 归一化.
- 可加性: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

§1.4 几何概型

- 几何概率模型: $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, $|\Omega| < \infty$,

  事件A 的概率定义为

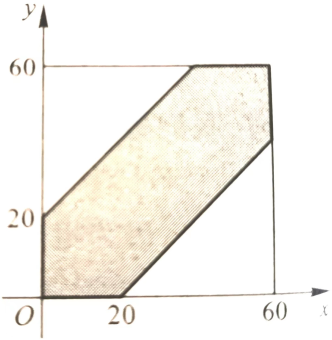
$$P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

- "人人平等"

例1.4.4. 两人约$7 \sim 8$ 点某地见, 到达后等20 分钟离去.

$A =$ 两人能会面, 求: $P(A)$.

- $\omega = (x, y)$, $0 \leqslant x, y \leqslant 60$.
- $\omega \in A$ iff $|x - y| \leqslant 20$.
- $|\Omega| = 60^2$,
  $P(A) = |A| = 1 - (2/3)^2$.



贝特朗(Bertrand)悖论: 在单位圆周上随机取一条弦.

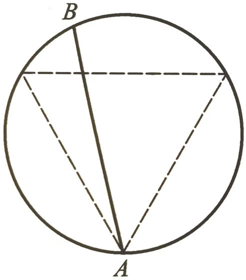
$$A = \text{“弦长大于}\sqrt{3}\text{”}, \text{ 求} P(A).$$

- 解法一.

$\Omega = S^1 = (0, 2\pi)$,

$A = (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$,

$P(A) = \frac{1}{3}$.



- 解法二.

  $\Omega = B(0,1)$,

  $A = B(0, \frac{1}{2})$,

  $P(A) = \frac{1}{4}$.

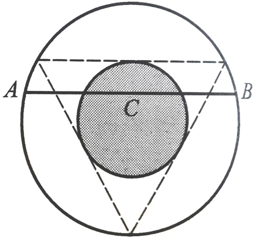
- 解法三.

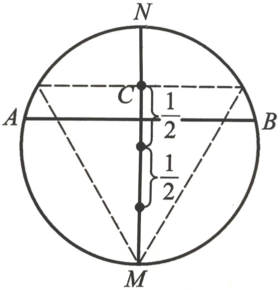
  $\Omega = (0,1)$,

  $A = [0, \frac{1}{2})$,

  $P(A) = \frac{1}{2}$.

- 随机取.





古典/几何概型 $P(A) := \frac{|A|}{|\Omega|}$, "$\forall A \subseteq \Omega$" 的性质:

- 非负性: $P(A) \geqslant 0$.
- 规范性: $P(\Omega) = 1$, 归一化.
- 可加性: $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

- 连续性: 若 $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, 则

$$P\left(\lim_n A_n\right) = \lim_n P(A_n).$$

§1.5. 概率空间

- 基本假设: 非负性 $P(A) \geqslant 0,$

  归一化 $P(\Omega) = 1.$

- 直观要求: 有限可加性 $P(A+B) = P(A) + P(B),$

  连续性 $\lim_n P(A_n) = P(\lim_n A_n).$

- 在基本假设下, 直观要求等价于可列可加性:

  若$A_1, A_2, \cdots$ 互不相容(即两两不相容，或两两不相交), 则

$$P\left(\sum_n A_n\right) = \sum_n P(A_n).$$

在基本假设下, 有限可加性、连续性蕴含着:

- $P(\varnothing)=0$, 有限可加性.
- 可列可加性: 若$A_1, A_2, \cdots$ 两两不交, 则

$$
\begin{aligned}
\sum_n P\left(A_n\right) &= \lim_n \sum_{i=1}^n P\left(A_i\right) = \lim_n P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) \\
&= P\left(\lim_n \sum_{i=1}^n A_i\right) = P\left(\bigcup_n \sum_{i=1}^n A_i\right) \\
&= P\left(\bigcup_n A_n\right).
\end{aligned}
$$

在基本假设下, 反过来, 可列可加性蕴含着:

- $P(\varnothing)=0$: $A_n=\varnothing, \forall n$.
- 有限可加性: $A_m=\varnothing, \forall m>n$,

$$P(A_1+\cdots+A_n)=P(A_1)+\cdots+P(A_n).$$

- $P(C-A)=P(C)-P(A)$, $P(A^c)=1-P(A)$.
- 单调性: 若$A\subseteq C$, 则$P(C)\geqslant P(A)$.

- 连续性: $\lim_n P(A_n) = P(\lim_n A_n)$.

(1) 设$A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$, 记$A = \bigcup_n A_n$.

(2) 记$B_1 = A_1$, $B_n = A_n \backslash A_{n-1}, \forall n \geqslant 2$.

(3) 则

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} B_i, \quad \lim_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{i=1}^{\infty} B_i.$$

(4) 故,

$$P\left(\lim_n A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \lim_n \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \lim_n P(A_n).$$

定义

- 若$\mathcal{F} \subseteq 2^{\Omega} =:= \{A : A \subseteq \Omega\}$ 满足下列三条, 则称$\mathcal{F}$ 为Ω 的一个事件域(σ 代数; σ 域).

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(2) 若$A \in \mathcal{F}$, 则$A^c \in \mathcal{F}$,

(3) 若$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$, 则$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

- 含$\Omega, \varnothing$; 对可数次交、并、补运算封闭.
- 最大/小的σ 代数: 2^{Ω}; $\{\varnothing, \Omega\}$.
- 若$A \in \mathcal{F}$, 则称A (关于$\mathcal{F}$) 可测.

σ 代数的含义: 观测能力、信息量.

例. 投两枚硬币, $\Omega = \{HH, TT, TH, HT\}$.

- σ 代数选法1: $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$.
- “基本事件”:

$$A_1 = \{HH\},\ A_2 = \{TT\},\ A_3 = \{HT, TH\}.$$

σ 代数选法2:

$$\mathcal{G} = \Big\{\varnothing, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_3, A_2 \cup A_3, \Omega\Big\}$$

- 例. $\Omega=\{R,O,Y,G,B,P\}$, $\mathcal{F}=2^{\Omega}$,
- “基本事件”:

$$\{R,G\},\ \{O\},\ \{Y\},\ \{B\},\ \{P\}.$$

- $\mathcal{G}=$

$$\Big\{\varnothing;\ \{R,G\},\ \{O\},\ \{Y\},\ \{B\},\ \{P\};\ \Omega;\{O,Y,B,P\},$$
$$\{R,G,O,Y,B\},\ \{R,G,O,Y,P\},\ \{R,G,O,B,P\},\{R,G,Y,B,P\};$$
$$\{R,G,O\},\ \underset{\sim\sim\sim}{\{R,G,Y\}},\ \{R,G,B\},\ \{R,G,P\},$$
$$\{O,Y\},\ \{O,B\},\ \{O,P\},\ \{Y,B\},\ \{Y,P\},\ \{B,P\};$$
$$\{R,G,O,Y\},\ \{R,G,O,B\},\ \{R,G,O,P\},\{R,G,Y,B\},\ \{R,G,Y,P\},$$
$$\{R,G,B,P\},\ \{O,Y,B\},\ \{O,Y,P\},\ \underset{\sim\sim\sim}{\{O,B,P\}},\ \{Y,B,P\}\Big\}.$$

- $\mathcal{G}=\Big\{A:\ R,G\in A,\ \text{或}R,G\in A^c\Big\}$. 例, $\{R,B\}\notin\mathcal{G}$.

σ 代数的生成.

- $\mathcal{A}$ 生成的σ 代数: 包含$\mathcal{A}$ 的最小σ 代数,

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\mathcal{F} \text{ 是}\sigma\text{代数},\ \mathcal{F}\supseteq\mathcal{A}} \mathcal{F}.$$

- 离散σ 代数:

  假设A_i, $i \in I$, 是Ω 的划分, 其中$I = \{1, \cdots, n\}$ 或$\{1, 2, \cdots\}$.

$$\mathcal{A} = \{A_i : \forall i \in I\}, \quad \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}) = \left\{ \bigcup_{i\in J} A_i : J \subseteq I \right\}.$$

  称A_i, $i \in I$, 为基本事件.

Borel σ 代数$\mathcal{B}(\cdot)$: 开集生成的σ 代数.

- $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{A})$,

$$\mathcal{O} = \{(a, b) : a < b\}, \quad \mathcal{A} = \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{R}\}.$$

- 没有“基本事件”：$\{x\} \in \mathcal{B}$, 但$\mathcal{B} \neq \sigma\left(\{\{x\}, x \in \mathbb{R}\}\right)$.
- $\mathcal{B}([0,1]) = \{B \cap [0,1] : B \in \mathcal{B}\}$.
- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\mathcal{A})$,

$$\mathcal{A} = \{(-\infty, x_1] \times \cdots \times (-\infty, x_d] : x_1, \cdots, x_d \in \mathbb{R}\}.$$

- 例1.5.9. 不存在$P: 2^{[0,1]} \to \mathbb{R}$ 同时满足基本假设、可列可加性、平移不变性: $P(x+A) = P(A)$. 其中,

$$x + A = \{x + y : y \in A\}, \quad A,\ x + A \subseteq [0,1].$$

- $\exists! P : \mathcal{B}([0,1]) \to \mathbb{R}$ 满足$\star\star$, $\star\star$ 和$\star\star$.
  (Lebesgue 测度, 几何概型)

定义

- 假设$\mathcal{F}$ 是Ω 上的一个σ 代数. 若$P:\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ 满足下列三条, 则称P 为$(\Omega,\mathcal{F})$ 上的一个概率. (定义1.5.2)

(1) 非负性: $P(A)\geqslant 0,\ \forall A\in\mathcal{F}$.

(2) 规范性: $P(\Omega)=1$. (归一化)

(3) 可列可加性: 若$A_1,A_2,\cdots\in\mathcal{F}$, 两两不交(互不相容), 则

$$P\left(\bigcup_i A_i\right)=\sum_i P\left(A_i\right).$$

- Ω: 样本空间; $(\Omega,\mathcal{F})$: 可测空间; $(\Omega,\mathcal{F},P)$: 概率空间.

- 古典概型: $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$; 几何概型: $\Omega, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

$$P : A \mapsto \frac{|A|}{|\Omega|} \text{ 是概率.}$$

- ~~不可能事件~~. 空集 $\emptyset$, 零概率事件: $P(A) = 0$.
  - 例. 几何概型, $\Omega = [0,1]$, $A = \{\frac{1}{2}\}$.
- 若$P(A) = 1$, 则称A 几乎必然发生, 记为A a.s..

$$\text{a.s.} = \text{almost surely}$$

- 若$P(A) = p$, 则称A 以概率p 发生.

概率的性质:

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.
- $P(A \cup B) \leqslant P(A) + P(B)$. (布尔不等式)
- $P(\bigcup_n A_n) \leqslant \sum_n P(A_n)$. (次可列可加性)
- $P(AB) \geqslant P(A) + P(B) - 1$. (Bonferroni 不等式)
- 若当(Jordan)公式:

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = & \sum_i P(A_i) - \sum_{i<j} P(A_i A_j) \\
& + \sum_{i<j<k} P(A_i A_j A_k) - \cdots \\
& + (-1)^{n-1} P(A_1 \cdots A_n).
\end{aligned}
$$

例1.5.6. n 封信, n 只信封, 随机装(每只信封装一封信), $A=$“至少装对1 封”, 求: $P(A)$.

- $A_i=$“第i 封装对”, $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.

$$P\left(A_1 \cdots A_k\right)=\frac{(n-k)!}{n!}.$$

- 若当公式:

$$P(A)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} C_n^k \frac{(n-k)!}{n!}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \frac{1}{k!}.$$

- $\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1-e^{-1}$.

例1.5.8. 离散概率空间.

- $\Omega = \{1, \cdots, n\}$ (或$\{1, 2, \cdots\}$). $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$.
- $P(\{i\}) = p_i, \forall i.$

$$p_i \geqslant 0,\ \forall i; \quad \sum_i p_i = 1.$$

- $P(A) = \sum_{i \in A} p_i, \forall A \in \mathcal{F}.$
- 一般地，设$\mathcal{F}$ 有基本事件A_i, $i \in I$.
- $\mathcal{F} = \sigma(\{A_i, i \in I\})$:

$$P(A_i) = p_i,\ \forall i \in I; \quad P(A) = \sum_{i \in J} p_i, \quad \forall A = \sum_{i \in J} A_i \in \mathcal{F}.$$

反例. $\Omega = \{1,2,3,4\}$. $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$.

- $\mathcal{A} = \{A, B\}$, $\quad \sigma(\mathcal{A}) = 2^{\Omega}$.
- $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$. $\quad p_1 = p_4 = a$; $p_2 = p_3 = \frac{1}{2} - a$.
- π 系: 非空; 若$A, B \in \mathcal{A}$, 则$AB \in \mathcal{A}$.

  关键点: $\mathcal{A}$ 不是π 系.

例. $\Omega = \mathbb{R}$.　　$\mathcal{A} = \{A_x : x \in \mathbb{R}\}$, 其中$A_x := (-\infty, x]$.

- $F(x) = P(A_x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ 可以“唯一确定” $P(B)$, $\forall B \in \mathcal{B}$.
- F 必须相容, 即, 为分布函数:

$$F \nearrow; \quad F(-\infty) = 0, \ F(\infty) = 1; \quad F(x+) = F(x).$$

- 若F 是分布函数, 则存在 P.