§8.3 单参数模型中的检验

- 复杂检验问题(Θ_0, θ_1) 与(Θ_0, Θ_1):

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta = \theta_1,$$

$$H_0 : \theta \in \Theta_0 \quad \leftrightarrow \quad H_1 : \theta \in \Theta_1.$$

- 定理3.1. 若存在$\theta_0 \in \Theta_0$ 使得检验问题(θ_0, θ_1) 的水平为α 的UMP 否定域$\mathcal{W}$ 满足: $P_\theta(\vec{X} \in \mathcal{W}) \leqslant \alpha, \forall \theta \in \Theta_0$. 则, $\mathcal{W}$ 是检验问题(Θ_0, θ_1) 的水平为α 的UMP 否定域.
- 定理3.2. 若对任意$\theta_1 \in \Theta_1$, 检验问题(Θ_0, θ_1) 都存在水平为α 的UMP 否定域$\mathcal{W}$, 且此$\mathcal{W}$ 不依赖于θ_1. 则, 此$\mathcal{W}$ 是检验问题(Θ_0, Θ_1) 的水平为α 的UMP 否定域.

- 定义3.1. 若Θ 为有限或无穷区间, 密度或分布列为

$$f(x,\theta) = S(\theta)h(x)\exp\left\{C(\theta)T(x)\right\}, \quad \theta \in \Theta,$$

其中, $C(\theta)$ 严格增. 则称$f(x,\theta)$, $\theta \in \Theta$ 为单参数指数族.

- 定理3.3*. 若为单参族, 则$P_\theta(\sum_{i=1}^n T(X_i) > c)$ 关于θ 单调上升.

- 例3.1. $f(x,\theta) = \frac{1}{\theta}\exp\left\{-\frac{1}{\theta}x\right\}$, $x > 0$. $\Theta = (0,\infty)$.

$$记X \sim \mathrm{Exp}(1), 则X_\theta \stackrel{d}{=} \theta X.$$

- 例3.2. $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, σ^2 已知. $\theta = \mu$, $\Theta = (-\infty,\infty)$.

$$f(x,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}.$$

$$记X_0 \sim N(0,\sigma^2), 则X_\mu \stackrel{d}{=} \mu + X_0.$$

- 定理3.4. 假设总体分布族为单参指数族

$$f(x,\theta) = S(\theta)h(x)\exp\{C(\theta)T(x)\}, \quad \theta \in \Theta.$$

若

$$\mathcal{W} := \left\{ \vec{x} : \sum_{i=1}^{n} T(x_i) > c \right\}$$

满足$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = \alpha$, 则$\mathcal{W}$ 是单边问题

$$H_0 : \theta \leqslant \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta > \theta_0$$

的水平为α 的UMP 否定域.

- 单边问题$H_0 : \theta \geqslant \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta < \theta_0$ 的UMP 否定域为$\mathcal{W} = \{\vec{x} : \sum_{i=1}^{n} T(x_i) < c\}$, 其中$c$ 使得$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = \alpha$.

例3.1. 总体: $\mathrm{Exp}(\frac{1}{\theta})$, $\Theta=(0,\infty)$. $\theta\geqslant 6000$(单位: 小时)为合格. 测得5 个数据, 试进行检验.

- 提问题. $H_0:\theta\leqslant\theta_0=6000\leftrightarrow H_1:\theta>\theta_0$. (防止次品出厂).
- 总体为单参指数族, $T(x)=x$, 因此, UMP 否定域形如

$$\mathcal{W}=\left\{\vec{x}:\sum_{i=1}^{n}x_i>c\right\}.$$

- 在θ_0 下, $K_{2n}:=2\sum_{i=1}^{n}X_i/\theta_0\sim\chi^2(2n)$. 因此, 要求

$$P_{\theta_0}(\vec{X}\in\mathcal{W})=P(K_{2n}>2c/\theta_0)=\alpha.$$

即, 应取$2c/\theta_0=\chi^2_{1-\alpha}(2n)$, 即$c=\chi^2_{1-\alpha}(2n)\times\theta_0/2$.

- 取$\alpha=0.05$, 查表获得$\chi^2_{0.95}(10)=18.307$,

  即$c=18.307\times 6000/2=54921$.
- $\sum_{i=1}^{5}x_i=22313<54921$, 故接受$H_0$, 没有很强的统计结论.

例3.2. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知$(=1.21)$, 测得6个数据. $\mu \geqslant 30$ 则合格. 问: 设水平为$\alpha = 0.05$, 是否可以出厂?

- 提问题. $H_0 : \mu \leqslant \mu_0 = 30 \leftrightarrow H_1 : \mu > \mu_0$. (防止次品出厂).
- 总体为单参指数族: $f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}$.
  $T(x) = x$, 因此, UMP 否定域形如
  $$\mathcal{W} = \left\{ \vec{x} : \sum_{i=1}^{n} x_i > \tilde{c} \right\} = \left\{ \vec{x} : \frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu_0)}{\sigma} > c \right\}.$$
- 取$c = z_{1-\alpha}$:
  $$P_{\mu_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P_{\mu_0}\left(\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu_0)}{\sigma} > c \right) = \alpha.$$
- 查表获得$z_{0.95} = 1.65$.
  代入数据: $\frac{\sqrt{n}(\bar{x}-\mu_0)}{\sigma} = 2.212 > 1.65$, 故否定$H_0$, 可出厂!

例3.3. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ 已知$(=3)$, 测得9个数据.

$\sigma < \sigma_0 = 0.005$ 则合格. 问: 设水平为$\alpha = 0.05$, 是否合格?

- 提问题. $H_0 : \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \leftrightarrow H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$.
- 总体为单参指数族: $f(x, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\}$, $T(x) = (x-\mu)^2$, 因此, UMP 否定域形如

$$\mathcal{W} = \left\{ \vec{x} : \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 < \tilde{c} \right\} = \left\{ \vec{x} : \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 < c \right\}.$$

- 取$c = \chi^2_\alpha(n)$:

$$P_{\sigma_0^2}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = P_{\sigma_0^2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2 < c \right) = \alpha.$$

- 查表获得$c = \chi^2_{0.05}(9) = 3.325$.

  代入数据: $\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 = 13.2563 > 3.325$, 故接受$H_0$.

- 定理3.5 & 3.6 *. 单参指数族的双边问题

$$H_0 : \theta = \theta_0 \leftrightarrow H_1 : \theta \neq \theta_0$$

不存在水平为α 的UMP 否定域.

- 定理3.7. 设总体为单参指数族, 在$\theta = \theta_0$ 下, 存在r_0 使得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(X_i) - r_0 \overset{d}{=} r_0 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(X_i).$$

令

$$\mathcal{W} = \left\{ \vec{x} : \left| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T(x_i) - r_0 \right| > c \right\},$$

其中c 满足$P_{\theta_0}(\vec{X} \in \mathcal{W}) = \alpha$. 则$\mathcal{W}$ 为双边问题的水平为α 的UMPU 否定域.

例3.4. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, σ^2 已知. 求

$$H_0 : \mu = \mu_0 \leftrightarrow H_1 : \mu \neq \mu_0$$

的水平为α 的最优无偏否定域.

- 总体为单参指数族: $f(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2} e^{\frac{\mu}{\sigma^2}x}$.
- $T(x) = x$. 在$\mu = \mu_0$ 下, $\bar{X} \sim N(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$, 分布关于$\mu_0$ 对称. 因此, UMPU 否定域形如

$$\mathcal{W} = \{\vec{x} : |\bar{x} - \mu_0| > c\} = \left\{\vec{x} : \left|\frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}\right| > \tilde{c}\right\}.$$

- 查表获得$\tilde{c} = z_{1-\alpha/2}$, 于是$c = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}$.