

§7.2 矩估计

- **思想**: 样本矩 \approx 真实矩. **理论**: LLN.
- 总体矩: $\alpha_k = \alpha_k(\theta) = E_\theta X^k$, 是参数的函数.
- 样本矩: $a_k = \overline{X^k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ 或 $\overline{x^k}$, 是统计量.
- 定义2.1:
 - (1) 称 a_k 为 α_k 的矩估计.
 - (2) 若待估量 $g(\theta) = \phi(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$, 其中 ϕ 为连续函数, 则称 $\phi(a_1, \dots, a_k)$ 为 $g(\theta)$ 的矩估计.

例2.1 (续例1.1) 飞机最大飞行速度 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 样本量: n .
求 μ, σ^2 的矩估计.

- Step 1. 将待估量写为矩的函数:

$$\mu = \alpha_1, \quad \sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2.$$

- Step 2. 求涉及到的样本矩: $a_1 = \bar{x}, a_2 = \overline{x^2}$.
- Step 3. 代入函数:

$$\hat{\mu} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

例2.4. 总体: $X \sim U(0, \theta)$. 样本量: n . 求 θ 的矩估计.

- $\alpha_1 = \frac{1}{2}\theta$, 即 $\theta = 2\alpha_1$. 故 $\hat{\theta}_1 = 2\bar{X}$ 是 θ 的矩估计.
- $\alpha_2 = \frac{1}{3}\theta^2$, 即 $\theta = \sqrt{3\alpha_2}$. 从而 $\hat{\theta}_2 = \sqrt{3\bar{X}^2}$ 也是 θ 的矩估计.
- 比较 $\hat{\theta}_1$ 与最大似然估计 $\hat{\theta} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i$.

(1) 当 $2\bar{X} < \max_{1 \leq i \leq n} X_i$ 时, $\hat{\theta}_1$ 不合理. 但, $\hat{\theta}$ 总是合理.

(2) 期望:

$$E_{\theta}\hat{\theta}_1 = 2E\bar{X} = \theta, \quad E_{\theta}\hat{\theta} = \frac{n}{n+1}\theta \quad (\text{例3.6.7}).$$

(3) 方差:

$$\begin{aligned} \text{var}_{\theta}(\hat{\theta}_1) &= \frac{4}{n} \text{var}_{\theta}(X) = \frac{4}{n} \cdot \frac{\theta^2}{12} = \frac{1}{3n} \theta^2, \\ \text{var}_{\theta} \left(\frac{n+1}{n} \hat{\theta} \right) &= \frac{(n+1)^2}{n^2} \cdot \frac{n}{(n+1)^2(n+2)} \theta^2 = \frac{1}{n(n+2)} \theta^2. \end{aligned}$$