

### §4.3 中心极限定理

- 定理3.1(Linderberg-Levy CLT). 假设 $X_1, X_2, \dots$  独立同分布,  $0 < \text{var}(X_1) < \infty$ . 那么,

$$S_n^* \xrightarrow{d} Z \sim N(0, 1).$$

- 应用:

$$P(S_n \leq x) = P(S_n^* \leq x^*) \approx \Phi(x^*) =: p,$$

其中,  $x^* = \frac{x - n\mu}{\sqrt{n\sigma}}$ .

例3.1. 加法器同时收到20个噪声电压 $V_k, k = 1, \dots, 20$ , 它们独立同分布,  $V_1 \sim U(0, 10)$ . 记 $V = \sum_{k=1}^{20} V_k$ , 求 $P(V > 105)$ .

- 此题已知 $n = 20, x = 105$ , 求 $p$ .
- $EV_1 = 5, \text{var}(V_1) = \frac{10^2}{12}$ .
- 根据CLT,

$$P(V > 105) = P(V^* > x^*) \approx 1 - \Phi(x^*) =: p,$$

其中,

$$x^* = \frac{105 - 20 * 5}{\sqrt{20 * \frac{100}{12}}}.$$

- 计算得 $x^* \approx 0.387$ . 查表得 $\Phi(x^*) = 0.652$ , 从而所求之 $p = 1 - 0.652 = 0.348$ .

例3.2. 旅馆有500间客房, 每间有一台2千瓦的空调. 入住率为80%. 问: 需多少千瓦的电力能有99% 的把握保证电力足够?

- 已知 $n, p$ , 求 $x$ . 假设提供 $x$  千瓦.
- $A_i =$  第 $i$  间房开空调,  $P(A_i) = 80\%$ ,  $X_i = 2 \times 1_{A_i}$ .  $n = 500$ .
- $EX_1 = 2.8 = 1.6$ ,  $\text{var}(X_1) = 4 \times 0.8 \times 0.2 = 0.64$ .
- 要求 $x$  满足:  $P(S_n \leq x) \geq 99\% = p$ . 根据CLT, 要求

$$P(S_n^* \leq x^*) \approx \Phi(x^*) \geq 0.99,$$

其中

$$x^* = \frac{x - 500 * 2 * 0.8}{\sqrt{500 * 2^2 * 0.8 * 0.2}}.$$

- 查表得 $\Phi(2.33) = 0.99$ . 即, 要求 $x^* \geq 2.33$ .

即, 要求 $x \geq 800 + 2.33 * \sqrt{320} = 841.68$ , 从而需842 千瓦.

例3.3. 桥的强度 $Y \sim N(300, 40)$  (单位: 吨), 车的平均重量为5, 方差为2. 问: 为保证桥不出问题的概率不小于0.99997, 最多允许在桥上同时出现多少辆车?

- 已知 $x$ ,  $p = 0.99997$ , 求 $n$ .

- 假设有 $n$  辆车在桥上, 第 $i$  辆的重量为 $X_i$ .

模型假设 $X_1, \dots, X_n$  独立同分布, 且与 $Y$  相互独立.

- 记 $S_n = X_1 + \dots + X_n$ , 保证 $P(S_n \leq Y) \geq 0.99997$ .

- 根据CLT 及独立性, 近似地,

$S_n - Y \sim N(5n - 300, 2n + 40)$ . 因此, 令 $0^* = \frac{0 - (5n - 300)}{\sqrt{2n + 40}}$ , 有

$$P(S_n \leq Y) = P(S_n - Y \leq 0) \approx \Phi(0^*).$$

- 要求 $\Phi(0^*) \geq 0.99997$ , 查表得 $x^* \geq 4$ , 即,  $\frac{-(5n - 300)}{\sqrt{2n + 40}} \geq 4$ , 解得 $n \leq 50.5$ . 从而, 最多同时50 辆车.