第四章概率极限定理

§4.1 随机序列的收敛性

- 定义1.1. 若

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\xi_n - \eta| \geqslant \varepsilon\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

则称ξ_n 依概率收敛于η, 记为$\xi_n \xrightarrow{P} \eta$.

- 定义1.2. 若

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \xi_n = \eta\right) = 1$$

则称ξ_n 几乎必然收敛于η, 记为$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta$.

- 定义1.3. 若

$$\lim_{n\to\infty} F_{\xi_n}(x) = F_\eta(x), \quad \forall x \in C(F_\eta),$$

则称ξ_n 依分布收敛于η, 记为$\xi_n \xrightarrow{d} \eta$.

- 定理1.1. 若$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta$, 则$\xi_n \xrightarrow{P} \eta$.
- 令$A_n = \{|\xi_n - \eta| \geqslant \varepsilon\}$, 则(不加证明地接受)

$$\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta \quad \text{当且仅当} \quad P\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m\right) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \ \forall \varepsilon > 0,$$

$$\xi_n \xrightarrow{P} \eta \quad \text{当且仅当} \quad P(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0, \ \forall \varepsilon > 0.$$

- 例1.1 表明$\xi_n \xrightarrow{P} \eta$ 不能推出 $\xi_n \xrightarrow{\text{a.s.}} \eta$.
- 定理1.2. 若$\xi_n \xrightarrow{P} \eta$, 则$\xi_n \xrightarrow{d} \eta$.
- 例1.2 表明$\xi_n \xrightarrow{d} \eta$ 不能推出 $\xi_n \xrightarrow{P} \eta$.

- 假设$X_1, X_2, \cdots$ 是随机变量序列, 令

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n.$$

- 定义1.4. 若EX_n, $n = 1, 2, \cdots$ 都存在, 且

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{P} 0,$$

则称$X_1, X_2, \cdots$ 服从(弱)大数律(Weak Law of Large Numbers, WLLN).

- 定义1.5. 若EX_n, $n = 1, 2, \cdots$ 都存在, 且

$$\frac{1}{n}(S_n - ES_n) \xrightarrow{\text{a.s.}} 0,$$

则称$X_1, X_2, \cdots$ 服从强大数律(SLLN).

- 定义1.6. 若EX_n, $\mathrm{var}(X_n)$, $n=1,2,\cdots$ 都存在, $\mathrm{var}(X_n)$ 不全为0, 且

$$S_n^* = \frac{S_n - ES_n}{\sqrt{\mathrm{var}(S_n)}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1),$$

则称$X_1, X_2, \cdots$ 服从中心极限定理(Central Limit Theorem, CLT).

- 定义1.7. 若对任意$n \geqslant 2$ 都有$X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, 则称$X_1, X_2, \cdots$ 相互独立.
- 若$X_1, X_2, \cdots$ 相互独立, 且$X_n \stackrel{d}{=} X_1$, $\forall n \geqslant 2$, 则称$X_1, X_2, \cdots$ 独立同分布, 记为i.i.d. (independent and identically distributed).