§3.6 n 维随机向量

- 定义6.1. 设$\xi = (X_1, \cdots, X_n)$ 是n 维向量, 称

$$F(x_1, \cdots, x_n) = P(X_1 \leqslant x_1, \cdots, X_n \leqslant x_n), \quad x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}^n$$

为ξ 的联合分布函数, 也记为F_ξ 或$F_{X_1, \cdots, X_n}$.

- 定义6.2. 若ξ 取有限个或可列个 “值” (n 维向量), 则称ξ 为离散型. (注: 当且仅当X, Y 都是离散型.)

- 定义6.3. 若存在$p(x_1,\cdots,x_n)$ 使得对任意n 维矩形 D 都有

$$P(\xi\in D)=\int\cdots\int_D p(x_1,\cdots,x_n)dx_1\cdots dx_n,$$

则称ξ 为连续型随机向量, 称$p(x_1,\cdots,x_n)$ 为ξ 的联合密度, 也记为$p_{X_1,\cdots,X_n}$. (注: ⋆⋆ 对一般的D 都成立.)

- 定义6.4. 对任意$1\leqslant k<n$, $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$, 则称$(X_{i_1},\cdots,X_{i_k})$ 为ξ 的(一个k 维)边缘, 其分布被称为ξ 的边缘分布.

例6.1 (多项分布). 设$U_1,\cdots,U_n$ 相互独立, 都服从如下分布:

$$P(U_i=k)=p_k,\quad k=1,\cdots,t,$$

其中$t\geqslant 2$, $p_k>0$, $\forall k$ 且$p_1+\cdots+p_t=1$.

- 背景模型: n 次独立重复试验(投掷一枚t 面骰子). 记

$$X_k=|\{1\leqslant i\leqslant n:U_i=k\}|=\sum_{i=1}^{n}1_{\{U_i=k\}}.$$

- $\xi=(X_1,\cdots,X_t)$ 的联合分布列:

$$P\left(\xi=(i_1,\cdots,i_t)\right)=\frac{n!}{i_1!\cdots i_t!}p_1^{i_1}\cdots p_t^{i_t}.$$

- 因为$X_t=n-\sum_{s=1}^{t-1}X_s$, 所以$\xi$ 与$(X_1,\cdots,X_{t-1})$ 等价.
- 任意边缘都服从多项分布.

  例, (X_1,X_2) 服从三项分布; 特别地, X_k 服从二项分布:

$$若U_i=k,\ 则令V_i=1;\ 若U_i\neq k,\ 则令V_i=0.$$

- 定义6.5. 若对任意$a_i < b_i$, $i = 1, \cdots, n$ 都有

$$\begin{aligned} &P(a_1 < X_1 < b_1, \cdots, a_n < X_n < b_n) \\ =&P(a_1 < X_1 < b_1) \cdots P(a_n < X_n < b_n), \end{aligned}$$

则称$X_1, \cdots, X_n$ 相互独立.

- 若$X_1, \cdots, X_n$ 相互独立, 且$F_{X_i} = F_{X_1}$, $i = 2, \cdots, n$, 则称$X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布.
- 若相互独立, 则上式中的$a_i < X_i < b_i$ 可以改为$X_i \in B_i$.

- 相互独立的充要条件与充分条件:

$$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n) = F_{X_1}(x_1)\cdots F_{X_n}(x_n) = f_1(x_1)\cdots f_n(x_n).$$

- 离散型:

$$\begin{aligned} &P\left(X_1 = x_{i_1}^{(1)},\cdots,X_n = x_{i_n}^{(n)}\right) \\ =&P\left(X_1 = x_{i_1}^{(1)}\right)\cdots P\left(X_n = x_{i_n}^{(n)}\right) = p_{i_1}^{(1)}\cdots p_{i_n}^{(n)}. \end{aligned}$$

- 连续型(定理6.1):

$$p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1,\cdots,x_n) = p_{X_1}(x_1)\cdots p_{X_n}(x_n) = p_1(x_1)\cdots p_n(x_n).$$

- 若X_i 与X_j 相互独立, $\forall i \neq j$, 则称$X_1,\cdots,X_n$ 两两独立.
- 例. 甲、乙玩石头剪刀布. 甲出X, 乙出Y, 结局为Z.

  则X, Y, Z 两两独立, 但不相互独立.

- 定义6.6. 称$(EX_1,\cdots,EX_n)$ 为ξ 的期望, 记为$E\xi$.
- 定义6.7. 记$\sigma_{ij}=\operatorname{cov}(X_i,X_j)$, $\rho_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}\sigma_{jj}}}$.
  称$\mathbf{\Sigma}=(\sigma_{ij})_{n\times n}$, $\mathbf{R}=(\rho_{ij})_{n\times n}$ 为ξ 的协方差阵, 相关系数阵.
- 定义6.8. n 维正态分布. 假设ξ 有如下的联合密度, 则称ξ 服从n 维正态分布, 记为$\xi\sim N(\vec{\mu},\mathbf{\Sigma})$.

$$p(\vec{x})=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n\sqrt{|\mathbf{\Sigma}|}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})\mathbf{\Sigma}^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})^T\right\}.$$

- $n=1$ 与$n=2$ 的特例已介绍.
- $N(\vec{\mu},\mathbf{\Sigma})$ 的数字特征: $\mu_i=EX_i$, $\sigma_{ij}=\operatorname{cov}(X_i,X_j)$.
- $X_1,\cdots,X_n$ 相互独立当且仅当$\sigma_{ij}=0$, $\forall i\neq j$.
- 边缘分布, 条件分布都是正态.

- 定理6.2 (分布函数法):

$$F_Y(y) = P(f(\xi) \leqslant y) = \int\cdots\int_{f(x_1,\cdots,x_n)\leqslant y} p(x_1, \cdots, x_n)dx_1 \cdots dx_n.$$

- 定理6.3.

$$EY = \int\cdots\int f(x_1, \cdots, x_n)p(x_1, \cdots, x_n)dx_1 \cdots dx_n.$$

例6.3, 6.4, 定义6.9. 若X 与Y 独立, $X \sim \Gamma(r, \lambda)$, $Y \sim \Gamma(s, \lambda)$. 则

$$X + Y \sim \Gamma(r + s, \lambda).$$

- 密度:

$$p_X(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

- $Z = X + Y$: $p_Z(z) = \int p_X(x) p_Y(z - x) dx$. $\forall z > 0$,

$$p_Z(z) = C \int_0^z x^{r-1} e^{-\lambda x} \cdot (z - x)^{s-1} e^{-\lambda(z-x)} dx$$

$$= C e^{-\lambda z} \int_0^1 (t z)^{r-1} \big((1 - t) z\big)^{s-1} d(t z) = \hat{C} z^{r+s-1} e^{-\lambda z}.$$

- 假设$X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布, 都服从$N(0,1)$.
- 由例2.5.2. $X_i^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$.
- 于是, $S_n := X_1^2+\cdots+X_n^2 \sim \Gamma(\frac{n}{2},\frac{1}{2})$, 密度为

$$p_n(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{n/2-1} e^{-x/2}, \quad x>0.$$

称为自由度为n 的卡方分布, 记为$\chi^2(n)$.

- 假设$Y_1,\cdots,Y_n$ 独立同分布, 都服从$\mathrm{Exp}(\lambda)=\Gamma(1,\lambda)$.
- 于是, $T_n := Y_1+\cdots+Y_n \sim \Gamma(n,\lambda)$.
- 由例4.5. $X_1^2+X_2^2 \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{2})$ 且$2\lambda Y_1 \sim \mathrm{Exp}(\frac{1}{2})$ 知$2\lambda T_n \sim \chi^2(2n)$.

例6.6. N 件产品中有D 件次品. 随机抽n 件, 包含X 件次品. 求EX 与$\mathrm{var}(X)$. (其中, $N \geqslant n \geqslant 2$).

- 随机数目的分解: $X = X_1 + \cdots + X_n$, 其中

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若第}i\text{ 件是次品}; \\ 0, & \text{若第}i\text{ 件是合格品}. \end{cases}$$

- 由期望的线性、伯努利分布的期望,

$$EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} P(\text{第}i\text{ 件是次品}) = n\frac{D}{N}.$$

- $\mathrm{var}(X) = EX^2 - (EX)^2$. 根据对称性,

$$EX^2 = \sum_{i=1}^{n} EX_i^2 + \sum_{i\neq j} EX_iX_j = nEX_1^2 + n(n-1)EX_1X_2,$$

- 由乘法公式,

$$EX_1X_2 = P(\text{前两件都是次品}) = \frac{D}{N}\cdot\frac{D-1}{N-1}.$$

- 因此,

$$\begin{aligned}\mathrm{var}(X) =& n\frac{D}{N} + n(n-1)\frac{D}{N}\cdot\frac{D-1}{N-1} - \left(n\frac{D}{N}\right)^2 \\ =& \frac{n(N-n)D(N-D)}{N^2(N-1)}.\end{aligned}$$

- 定理6.4. 设$\xi = (X_1, \cdots, X_n)$ 为连续型,

$$f : A \to G, \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto (y_1, \cdots, y_n)$$

一对一, C^1 且$J = \frac{\partial(y_1, \cdots, y_n)}{\partial(x_1, \cdots, x_n)} \neq 0$. 则$\eta = (Y_1, \cdots, Y_n)$ 是连续型, 且

$$p_\eta(y_1, \cdots, y_n) = p_\xi(x_1, \cdots, x_n)|J^{-1}|, \ (y_1, \cdots, y_n) \in G.$$

- 定理6.5. 设$\xi=(X_1,\cdots,X_n)$ 的协方差阵为$\mathbf{\Sigma}$, $Y_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}X_j$, $j=1,\cdots,m$. 记$\mathbf{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 则$\eta=(Y_1,\cdots,Y_m)$ 的协方差阵为$\mathbf{A\Sigma A}^T$.
- 定理6.6. 进一步, 若$\xi\sim N(\vec{\mu},\mathbf{\Sigma})$, 则$\eta\sim N(\vec{\mu}\mathbf{A}^T,\mathbf{A\Sigma A}^T)$.
- 设$X_1,\cdots,X_n$ 独立同分布, 将它们从小到大排列:

$$X_{(1)}\leqslant X_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant X_{(n)},$$

称$X_{(k)}$ 为第k 个顺序统计量.

例6.7. 设$X_1, \cdots, X_n$ 独立同分布, 都服从$U(0,1)$.
求$EX_{(k)}$ 与$\mathrm{var}(X_{(k)})$.

- 方法一、$\forall 0 < x < 1$,

$$P(X_{(k)} \leqslant x) = \sum_{i=k}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} x^i (1-x)^{n-i}.$$

- $k \leqslant i \leqslant n-1$, $\star\star'$

$$= \frac{n!}{i!(n-i)!}\left(ix^{i-1}(1-x)^{n-i} - x^i(n-i)(1-x)^{n-i-1}\right)$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!(n-i)!} x^{i-1}(1-x)^{n-i} - \frac{n!}{i!(n-i-1)!} x^i (1-x)^{n-i-1}$$

$$= a_{i-1} - a_i,$$

- $i = n$ 时, $(x^n)' = a_{n-1}$, 于是, $\forall 0 < x < 1$,

$$p_{X_{(k)}}(x) = \sum_{i=k}^{n-1} (a_{i-1} - a_i) + nx^{n-1} = a_{k-1}.$$

- 已有$q_k(x) := p_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$.
- $\forall \ell, m \geqslant 1$,

$$\int_0^1 x^\ell (1-x)^m dx = \frac{1}{\ell+1} \int_0^1 (1-x)^m dx^{\ell+1}$$
$$= -\frac{1}{\ell+1} \int_0^1 x^{\ell+1} d(1-x)^m = \frac{m}{\ell+1} \int_0^1 x^{\ell+1}(1-x)^{m-1} dx$$
$$= \cdots = \frac{m!}{(\ell+1)\cdots(\ell+m)} \int_0^1 x^{\ell+m} dx = \frac{\ell! m!}{(\ell+m+1)!}.$$

- 期望：取$\ell = k$, $m = n-k$, 知

$$EX_{(k)} = \int_0^1 x q_k(x) dx = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dx$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} = \frac{k}{n+1}.$$

- 已有$q_k(x) := p_{X_{(k)}}(x) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1}(1-x)^{n-k}$.

$$\int_0^1 x^{\ell}(1-x)^m dx = \frac{\ell! m!}{(\ell+m+1)!}.$$

- 二阶矩: 取$\ell = k+1$, $m = n-k$,

$$EX_{(k)}^2 = \int_0^1 x^2 q_k(x) dx = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-k} dx$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \cdot \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

- 方差:

$$\operatorname{var}(X_{(k)}) = EX_{(k)}^2 - \left(EX_{(k)}\right)^2 = \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{k^2}{(n+1)^2}$$
$$= \frac{k^2(n+1) + k(n+1) - k^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)} = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)}.$$

- 方法二、记

$$Y_1 = X_{(1)}, \quad Y_k = X_{(k)} - X_{(k-1)}, \ (2 \leqslant k \leqslant n), \quad Y_{n+1} = 1 - X_{(n)}.$$

- 不加证明地接受如下对称性*:

  对任意$1, \cdots, n+1$ 的全排$i_1, \cdots, i_{n+1}$, 都有

$$(Y_1, \cdots, Y_{n+1}) \text{ 与 } (Y_{i_1}, \cdots, Y_{i_{n+1}}) \text{ 同分布.}$$

- 期望: 注意到$S := Y_1 + \cdots + Y_{n+1} = 1$, 故

$$1 = ES = (n+1)EY_k \Rightarrow EY_k = \frac{1}{n+1}.$$

- $X_{(k)} = Y_1 + \cdots + Y_k$, 故

$$EX_{(k)} = \frac{k}{n+1}.$$

- Y_k 的方差：记$\sigma^2 := \mathrm{var}(Y_k) = \mathrm{var}(Y_{n+1}) = \mathrm{var}(X_{(n)})$.

$$F_n(x) := P(X_{(n)} \leqslant x) = x^n \Rightarrow q_n(x) = nx^{n-1}, \ 0 < x < 1$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \int_0^1 nx^{n+1}dx - \left(\int_0^1 nx^n dx\right)^2$$

$$= \frac{n}{n+2} - \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

- 协方差：注意到$S := Y_1 + \cdots + Y_{n+1} = 1$，故$\mathrm{var}(S) = 0$.
- 记$\sigma_{12} = \mathrm{cov}(Y_1, Y_2)$.

$$\mathrm{var}(S) = (n+1)\sigma^2 + (n+1)n\sigma_{12} \Rightarrow \sigma_{12} = -\frac{1}{(n+1)^2(n+2)}.$$

- $X_{(k)}$ 的方差：

$$\mathrm{var}(X_k) = k\sigma^2 + k(k-1)\sigma_{12} = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)}.$$