

第五章、乘积空间

- §5.1 有限维乘积空间(略)
- §5.2 多维L-S测度
- §5.3 可列维乘积空间
- §5.4 任意维乘积空间



§5.1 有限维乘积空间

- 乘积空间 $X_1 \times \cdots \times X_n$, 矩形 $\prod_{k=1}^n A_k$. e.g.

$$X = \prod_{k=1}^n X_k := \{\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) : x_k \in X_k, k = 1, \cdots, n\}.$$

- 可测结构. 设 \mathcal{F}_k 是 X_k 上的 σ 代数, ($k = 1, \cdots, n$).
- 可测矩形:

$$\mathcal{Q} := \{\star : A_k \in \mathcal{F}_k, k = 1, \cdots, n\}.$$

- 命题5.1.1. \mathcal{Q} 是半环, 且 $X \in \mathcal{Q}$.
- 乘积 σ 代数,

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_n = \prod_{k=1}^n \mathcal{F}_k := \sigma(\mathcal{Q}).$$

- 投影: $\pi_k : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_k$.
- 命题5.1.2. (1) $\pi_k : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (X_k, \mathcal{F}_k)$, 是可测映射;

$$(2) \mathcal{F} = \sigma \left(\bigcup_{k=1}^n \pi_k^{-1} \mathcal{F}_k \right) \\ \sigma \left(\left\{ \{\vec{x} : x_k \in A_k\} : 1 \leq k \leq n, A_k \in \mathcal{F}_k \right\} \right).$$

- 定理5.1.3. 设 $f = (f_1, \dots, f_n) : \Omega \rightarrow X$.

则 $f : (\Omega, \mathcal{S}) \rightarrow (X, \mathcal{F})$ 可测当且仅当 f_k 可测, $\forall k$.

- 截口. 设 $A \in \mathcal{F}$, $f : (X, \mathcal{F}) \rightarrow (Y, \mathcal{S})$.

$$A|_{x_1, \dots, x_i} = \{(x_{i+1}, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in A\}.$$

$$f|_{x_1, \dots, x_i} : (x_{i+1}, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n).$$

- 定理5.1.4. $A|_{x_1, \dots, x_i}, f|_{x_1, \dots, x_i} \in \prod_{k=1}^i \mathcal{F}_k$.

- 测度. 例, 联合 = 边缘 \times 条件,

$$\begin{aligned} P(\xi \in A_1, \eta \in A_2) &= \int_{A_1} \int_{A_2} p_{\eta|\xi}(x_2|x_1) dx_2 p_{\xi}(x_1) dx_1 \\ &= \int_{A_1} \mu_{\eta}(A_2|\xi = x_1) \mu_{\xi}(dx_1). \end{aligned}$$

- 定义5.1.1. $p(\cdot, \cdot) : (X_1, \mathcal{F}_1) \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, A_2) \mapsto p(x_1, A_2)$ 为从 (X_1, \mathcal{F}_1) 到 (X_2, \mathcal{F}_2) 的转移函数, 指:
 - (1) 固定 $x_1 \in X_1$, $p(x_1, \cdot)$ 是 \mathcal{F}_2 上的测度;
 - (2) 固定 $A \in \mathcal{F}_2$, $p(\cdot, A)$ 是 (X_1, \mathcal{F}_1) 上的可测函数.
- 若 $X_2 = \sum_n A_n$ 且 $p(x, A_n) < \infty, \forall x \in X_1, \forall n$, 则称 $p(\cdot, \cdot)$ 为 σ 有限的. (强调: 划分与 ω 无关.)
- 若 $p(x, X_2) < \infty, \forall x \in X_1$, 则称 $p(\cdot, \cdot)$ 为有限的转移函数. 若 $p(x, X_2) = 1, \forall x \in X_1$, 则称 $p(\cdot, \cdot)$ 为概率转移函数.

- 记 $(X, \mathcal{F}) := (X_1 \times X_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2)$, $\hat{X} = X_2 \times X_1$.
- 定理5.1.6. 设 $p(\cdot, \cdot)$ 为从 (X_1, \mathcal{F}_1) 到 (X_2, \mathcal{F}_2) 的 σ 有限的转移函数. (1) & (3) $\forall X_1$ 上的 σ 有限的测度 μ_1 , $\exists!$ X 上 σ 有限的测度 μ 使得

$$\mu(A_1 \times A_2) = \int_{A_1} p(x_1, A_2) \mu_1(dx_1);$$

- (2) 若 (X, \mathcal{F}, μ) 上的可测函数 f 的积分存在, 则

$$\int_X f d\mu = \int_{X_1} \mu_1(dx_1) \int_{X_2} f(x_1, x_2) p(x_1, dx_2).$$

- 定理5.1.7(乘积测度). Esp, $p(x_1, \cdot) \equiv \mu_2$. $\mu_1 \times \mu_2$,

$$\begin{aligned} \int_X f d\mu_1 \times \mu_2 &= \int_{X_1} \mu_1(dx_1) \int_{X_2} f(x_1, x_2) \mu_2(dx_2) \\ &= \int_{\hat{X}} \hat{f} d\mu_2 \times \mu_1 = \int_{X_2} \mu_2(dx_2) \int_{X_1} f(x_1, x_2) \mu_1(dx_1). \end{aligned}$$

- $X = \prod_{k=1}^n X_k, \mathcal{F} = \prod_{k=1}^n \mathcal{F}_k.$
- 定理5.1.9(归纳法). (1) 设 p_k 为从 $(\prod_{i=1}^{k-1} X_i, \prod_{i=1}^{k-1} \mathcal{F}_i)$ 到 (X_k, \mathcal{F}_k) 的 σ 有限的转移函数. $\forall X_1$ 上 (σ 有限的) 测度 $\mu_1,$
 $\exists!$ X 上 (σ 有限的) 的测度 μ 使得

$$\mu\left(\prod_{k=1}^n A_k\right) = \int_{A_1} \mu_1(dx_1) \int_{A_2} p_2(x_1, dx_2) \cdots \int_{A_n} p_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, dx_n);$$

- (2) 若 f 为 (X, \mathcal{F}, μ) 上的可测函数且积分存在, 则

$$\int_X f d\mu = \int_{X_1} \mu_1(dx_1) \int_{X_2} p_2(x_1, dx_2) \cdots \int_{X_n} p_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, dx_n) f(\vec{x}).$$

- 定理5.1.10(乘积测度). Esp. $p_k(x_1, \cdots, x_{k-1}; \cdot) \equiv \mu_k.$

§5.3 可列维乘积空间的概率测度

- 一列可测空间: (X_n, \mathcal{F}_n) , $n = 1, 2, \dots$
- $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n := \{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots) : x_n \in X_n, \forall n\}$.
- 投影: $\pi_n : X \rightarrow X_n$, $\pi_{(n)} : X \rightarrow X_{(n)} := \prod_{k=1}^n X_k$.
- 有限维: 在 $X_{(n)}$ 上, $\mathcal{F}_{(n)} := \prod_{k=1}^n \mathcal{F}_k = \sigma(\mathcal{Q}_{(n)})$,

$$\mathcal{Q}_{(n)} := \left\{ \prod_{k=1}^n A_k : A_k \in \mathcal{F}_k, k = 1, \dots, n \right\}.$$

- 用 $\pi_{(n)}$ 嵌入 X . 有限维可测(矩形)柱集:

$$\mathcal{Q}_{[n]} := \left\{ Q_{(n)} \times \prod_{k=n+1}^{\infty} X_k : Q_{(n)} \in \mathcal{Q}_{[n]} \right\} = \pi_{(n)}^{-1} \mathcal{Q}_{(n)};$$

$$\mathcal{F}_{[n]} := \left\{ A_{(n)} \times \prod_{k=n+1}^{\infty} X_k : A_{(n)} \in \mathcal{F}_{(n)} \right\} = \pi_{(n)}^{-1} \mathcal{F}_{(n)}.$$

- 命题5.3.1. $\mathcal{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{Q}_{[n]}$ 是半环, 且 $X \in \mathcal{Q}$;

$$\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{[n]} \text{ 是代数};$$

$$\mathcal{F} = \prod_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n := \sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\{\pi_n, \forall n\}).$$

定理 (定理5.3.2, Tulcea 定理)

设 $p_k : (\prod_{i=1}^{k-1} X_i, \prod_{i=1}^{k-1} \mathcal{F}_i) \rightarrow (X_k, \mathcal{F}_k)$ 为概率转移函数, $k \geq 2$.
则 $\forall (X_1, \mathcal{F}_1)$ 上的概率 P_1 , $\exists!$ $(\prod_{k=1}^{\infty} X_k, \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k)$ 上的概率 P 使

$$P \left(\prod_{k=1}^n A_k \times \prod_{k=n+1}^{\infty} X_k \right) \\ \stackrel{(*)}{=} \int_{A_1} P_1(dx_1) \int_{A_2} p_2(x_1, dx_2) \cdots \int_{A_n} p_n(x_1, \dots, x_{n-1}, dx_n).$$

- (1) $(*)$ 定义半环 $\mathcal{Q}_{(n)}$ 上的测度, \checkmark ;
- (2) 唯一地扩张, 得到 $\mathcal{F}_{(n)} = \sigma(\mathcal{Q}_{(n)})$ 上的概率, \checkmark ;
- (3) 利用 $\pi_{(n)}$ 得到 $\mathcal{F}_{[n]} = \pi_{(n)}^{-1} \mathcal{F}_{(n)}$ 上的概率 P_n , \checkmark ;
- (4) 证明 $P_n = P_{n+1}|_{\mathcal{F}_{[n]}}$, 故得到 $\mathcal{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_{[n]}$ 上的函数 P .
- (5) 证明 P 是 \mathcal{A} 上的概率, 从而唯一地扩张到 $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A})$ 上.

(4) 证明 $P_n = P_{n+1}|_{\mathcal{A}_{[n]}}$.

- $\forall A \in \mathcal{F}_{[n]} = \pi_{(n)}^{-1} \mathcal{F}_{(n)}$, $\exists! A_{(n)} \in \mathcal{F}_{(n)}$ 使得 $A = \pi_{(n)}^{-1} A_{(n)}$. 则

$$P_n(A) := \int_{X_1} P_1(dx_1) \int_{X_2} p_2(x_1, dx_2) \cdots \int_{X_n} \mathbf{I}_{A_{(n)}}(x_1, \cdots, x_n) p_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, dx_n).$$

- $\exists! A_{(n+1)} \in \mathcal{F}_{(n+1)}$ 使得 $A = \pi_{(n+1)}^{-1} A_{(n+1)}$.

- $A_{(n+1)} = A_{(n)} \times X_{n+1}$: $\pi_{(n)} = \pi_{(n+1) \rightarrow (n)} \circ \pi_{(n+1)}$, 故

$$\pi_{(n)}^{-1} A_{(n)} = \pi_{(n+1)}^{-1} \circ \pi_{(n+1) \rightarrow (n)}^{-1} A_{(n)} = \pi_{(n+1)}^{-1} (A_{(n)} \times X_{n+1}).$$

- $P_{n+1}(A) = P_n(A)$: ** =

$$\int_{X_{n+1}} \mathbf{I}_{A_{(n)} \times X_{n+1}}(x_1, \cdots, x_n; x_{n+1}) p_{n+1}(x_1, \cdots, x_n, dx_{n+1}).$$

(5) 证明 P 是 \mathcal{A} 上的概率.

- P 具有可加性. 只需证明 P 在 \emptyset (上)连续:

若 $A_{[1]}, A_{[2]}, \dots \in \mathcal{A}$, $A_{[n]} \downarrow \emptyset$, 则 $P(A_{[n]}) \rightarrow 0$.

- 理由(定理2.1.6): 设 A_1, A_2, \dots , $A := \sum_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$, 则

$$A_{[n]} = \sum_{i=n+1}^{\infty} A_i = A - \sum_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}, \quad P(A_{[n]}) = P(A) - \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

- 反证法验证★: 谬设 $P(A_{[n]}) \not\rightarrow 0$, 则 $\varepsilon := \downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_{[n]}) > 0$.
- 存在 $1 \leq m_1 < m_2 < \dots$ 使得 $A_{[n]} \in \mathcal{F}_{[m_n]}$, $\forall n$.

不妨设 $m_n = n$, 否则考虑 $B_{[k]} := A_{[n]}$, $m_n \leq k < m_{n+1}$.

- $\exists! A_{(n)}$ 使得 $A_{[n]} = \pi_{(n)}^{-1} A_{(n)}$, 则

$$A_{[n]} = \pi_{(n+1)}^{-1} (A_{(n)} \times X_{n+1}) \supseteq A_{[n+1]} \Rightarrow A_{(n)} \times X_{n+1} \supseteq A_{(n+1)}.$$

(5) 证明 P 是 \mathcal{A} 上的概率(续).

- $A_{(n)} \times X_{n+1} \supseteq A_{(n+1)}$. 等价地,

$$\mathbf{I}_{A_{(n+1)}}(x_1, \dots, x_{n+1}) \leq \mathbf{I}_{A_{(n)}}(x_1, \dots, x_n).$$

- $0 \leq \phi_{1,n+1}(x_1) \leq \phi_{1,n}(x_1) \leq 1$, 其中 $\phi_{1,n}(x_1) :=$

$$\int_{X_2} p_2(x_1, dx_2) \cdots \int_{X_n} \mathbf{I}_{A_{(n)}}(x_1, \dots, x_n) p_n(x_1, \dots, x_{n-1}, dx_n).$$

- 注: $P(A_{[n]}) = P_n(A_{[n]}) = \int_{X_1} \phi_{1,n}(x_1) P_1(dx_1)$.

- 令 $\phi_1 := \downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{1,n}$, 则由DCT,

$$\int_{X_1} \phi_1 dP_1 = \downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X_1} \phi_{1,n} dP_1 = \varepsilon > 0, \quad (\text{根据谬设}).$$

(5) 证明 P 是 \mathcal{A} 上的概率(续).

- $\exists \tilde{x}_1 \in X_1$ 使得 $\phi_1(\tilde{x}_1) > 0$.
- $\tilde{x}_1 \in A_{(1)}$. 否则

$$\mathbf{I}_{A_{(n)}}(\tilde{x}_1, x_1, \dots, x_n) \leq \mathbf{I}_{A_{(1)}}(\tilde{x}_1) = 0 \Rightarrow \phi_{1,n}(\tilde{x}_1) = 0, \forall n.$$

- $\phi_2(x_2) = \downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{2,n}(x_2)$, 其中 $\phi_{2,n}(x_2) :=$

$$\int_{X_3} p_3(\tilde{x}_1, x_2, dx_3) \cdots \int_{X_n} \mathbf{I}_{A_{(n)}}(\tilde{x}_1, x_2, \dots, x_n) p_n(\tilde{x}_1, x_2, \dots, x_{n-1}, dx_n).$$

- $\exists \tilde{x}_2$ 使得 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in A_{(2)}$ 使得 $\phi_2(\tilde{x}_2) > 0$
- $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{[n]} = \emptyset$, 矛盾!
- 故 $P(A_{[n]}) \rightarrow 0$, 即 P 在 \emptyset (上)连续.

定理 (定理5.3.3, Kolmogorov 定理)

设 P_k 为 (X_k, \mathcal{F}_k) 上的概率, 则 $\exists!$ $(\prod_{k=1}^{\infty} X_k, \prod_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k)$ 上的测度 P 使得

$$P \left(\prod_{k=1}^n A_k \times \prod_{k=n+1}^{\infty} X_k \right) = \prod_{k=1}^n P_k(A_k).$$

- 证: 取 $p_k : (\prod_{i=1}^{k-1} X_i, \prod_{i=1}^{k-1} \mathcal{F}_i) \rightarrow (X_k, \mathcal{F}_k)$ 为 P_k 即可.

§5.4 任意无穷维乘积空间的概率测度

- 一族非空集合 $\{X_t, t \in T\}$. 其中, 指标集 T 不可数.
- 乘积空间. $X = \prod_{t \in T} X_t := \{\{x_t, t \in T\} : x_t \in X_t, t \in T\}$.
- 注: 若 $X_t \equiv X_0$, 则 $x : T \rightarrow X_0$ 为 T 上取 X_0 值的“函数”.
- 投影/限制. $\forall t \in T, \forall U \subseteq S \subseteq T,$

$$\pi_t : X \rightarrow X_t, \quad x \mapsto x_t;$$

$$\pi_S : X \rightarrow X_S = \prod_{t \in S} X_t, \quad x \mapsto x_S := \{x_t, t \in S\};$$

$$\pi_{S \rightarrow U} : X_S \rightarrow X_U, \quad \pi_{S \rightarrow U} \circ \pi_S = \pi_U.$$

- 可测结构. 设 \mathcal{F}_t 是 X_t 上的 σ 代数, $\forall t \in T$.
- 有限维可测(矩形)柱集: $|S| < \infty$.

$$\mathcal{Q}_S = \left\{ \pi_S^{-1} \left(\prod_{t \in S} A_t \right), A_t \in \mathcal{F}_t, \forall t \in S \right\}; \quad \mathcal{F}_S = \sigma(\mathcal{Q}_S).$$

- 命题5.4.1 & 5.4.2. $\mathcal{Q}_S, \mathcal{Q} = \bigcup_{S \subseteq T, |S| < \infty} \mathcal{Q}_S$ 是半环且 $\ni X$.
- 命题5.4.3. $\mathcal{A} := \bigcup_{S \subseteq T, |S| < \infty} \mathcal{F}_S$ 是代数且 $\supseteq \mathcal{Q}$.
- 命题5.4.4. $\mathcal{F} := \sigma(\mathcal{Q}) = \sigma(\mathcal{A})$, 且

$$\mathcal{F} = \sigma(\{\pi_t, t \in T\}) = \{\pi_S^{-1} A : A \in \mathcal{F}_S, S \text{ 可列}\}.$$

- 注1: $\star := \sigma \left(\bigcup_{t \in T} \pi_t^{-1} \mathcal{F}_t \right)$.
- 注2: 证明 $\mathcal{F}_0 = \{\pi_S^{-1} A : A \in \mathcal{F}_S, S \text{ 可列}\}$ 是 σ 代数.

- 随机过程. (Ω, \mathcal{S}) 为(样本)可测空间.

指标集 T 视为“时间”. 时刻 $t \in T$, 取值空间为 (X_t, \mathcal{F}_t) .

- $f_t : \Omega \rightarrow X_t, \forall t \in T$.

$f := \{f_t, t \in T\}$ 视为 $\Omega \rightarrow X := \prod_{t \in T} X_t$ 的映射.

- 定理5.4.5. 记 $\mathcal{F} = \prod_{t \in T} \mathcal{F}_t$. 则

$$f : (\Omega, \mathcal{S}) \rightarrow (X, \mathcal{F}) \text{ iff } f_t : (\Omega, \mathcal{S}) \rightarrow (X_t, \mathcal{F}_t), \forall t \in T.$$

- 若 $(X_t, \mathcal{F}_t) \equiv (S, \mathcal{S}_0)$, 则称 f 是随机过程; 称 S 为(取)值空间/状态空间; 称 $f(\omega) = \{f_t(\omega) : t \in T\} \in S^T$ 为轨道.

$$(X_t, \mathcal{F}_t) \equiv (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$$

- (1) $\forall n \geq 1, t_1, \dots, t_n \in T$ 互不相同, P_{t_1, \dots, t_n} 是 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}^n$ 上的概率.
- (2) 对 t_1, \dots, t_n 的任意重排 $t(1), \dots, t(n)$,

$$P_{t_1, \dots, t_n} \left(\prod_{i=1}^n A_{t_i} \right) = P_{t(1), \dots, t(n)} \left(\prod_{i=1}^n A_{t(i)} \right),$$

- (3) $P_{t_1, \dots, t_n, t_{n+1}} \left(\prod_{i=1}^n A_{t_i} \times \mathbb{R} \right) = \star\star$.

- 定义5.4.1. 若 $\mathbf{P} := \{P_{t_1, \dots, t_n} : n \geq 1, t_1, \dots, t_n\}$ 满足以上三条, 则称它是**相容的**.
- 由(2) 可定义 $P_S, \forall S \subseteq T, |S| < \infty$.
- 由(3), $|S| < \infty, U \subseteq S \Rightarrow P_S \circ \pi_{S \rightarrow U}^{-1} = P_U$.

定理 (定理5.4.8, Kolmogorov 定理)

若 \mathbf{P} 是相容的, 则 $\exists!(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T)$ 上的概率 P , 使得

$$P(\pi_S^{-1}A) = P_S(A), \quad \forall |S| < \infty, A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^S.$$

- $\mathcal{F}_0 = \{\pi_{T_0}^{-1}(A) : A \in \mathcal{F}_{T_0}, T_0 \text{可列}\}$.
- Step 1. (引理5.4.6). 固定可列的 $T_0 \subseteq T$, 定义 $P(\pi_{T_0}^{-1}A)$.
将 T_0 中的指标编号: t_1, t_2, \dots , 视为 $1, 2, \dots$.
由 $n \rightarrow n+1$ 相容, 可产生正则条件概率, 此即转移概率测度.
用Tulcea 定理, \checkmark .
- Step 2.1. (引理5.4.7). 对不同编号良定. 由重排相容, \checkmark .
- Step 2.2. 对不同的 T_0 良定:
 T_1, T_2 可列, $\pi_{T_1}^{-1}A_1 = \pi_{T_2}^{-1}A_2$. 则 $P_{T_1}(A_1) = P_{T_2}(A_2)$.

Step 2.2. 对不同的 T_0 良定.

T_1, T_2 可列, $\pi_{T_1}^{-1}A_1 = \pi_{T_2}^{-1}A_2$. 则 $P_{T_1}(A_1) = P_{T_2}(A_2)$.

- $T_0 = T_1 \cup T_2$ 可列. 例, $\pi_{T_0 \rightarrow T_1} \circ \pi_{T_0} = \pi_{T_1}$, 故

$$\pi_{T_1}^{-1}A_1 = \pi_{T_0}^{-1}(\pi_{T_0 \rightarrow T_1}^{-1}A_1) \triangleq \pi_{T_0}^{-1}A_0, \quad \text{其中, } A_0 = \pi_{T_0 \rightarrow T_1}^{-1}A_1.$$

- 只需证明 $P_{T_0}(A_0) = P_{T_1}(A_1)$, 其中 $A_0 = \pi_{T_0 \rightarrow T_1}^{-1}A_1$, 即,

$$P_{T_0} \circ \pi_{T_0 \rightarrow T_1}^{-1} = P_{T_1}, \quad (\text{在 } \mathcal{F}_{T_1} \text{ 上.})$$

- $\mathcal{Q}_{T_1} := \bigcup_{S \subseteq T_1, |S| < \infty} \mathcal{Q}_S$ 是半环, 且 $\sigma(\mathcal{Q}_{T_1}) = \mathcal{F}_{T_1}$;

LHS 与 RHS 都是概率测度, 在 \mathcal{Q}_{T_1} 上相等, 故 \checkmark .

Step 3. P 为概率.

- 设 $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T$, 两两不交.
- $\exists T_n \subseteq T$ 可列, $B_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^{T_n}$ 使得 $A_n = \pi_{T_n}^{-1} B_n$.
- 令 $T_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n$. P_{T_0} 是 \mathcal{F}_{T_0} 上的概率, 故 \checkmark .

定理 (定理5.4.9)

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, P_t), t \in T$ 是概率空间. 则 $\exists!$ $(\mathbb{R}^T, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}^T)$ 上的概率 P , 使得

$$P(\{x : x_{t_i} \in A_i, i = 1, \dots, n\}) = \prod_{i=1}^n P_{t_i}(A_i).$$

- 注: 定理中的 P 记为 $\prod_{t \in T} P_t$.