# 第三章、积分

## §3.1 积分的定义

- $f$ 关于$\mu$ 的积分:

  值$(f)$的加权$(\mu)$求和, 或值的加权平均(概率空间).

- 典型方法:

  示性函数→ 非负简单函数→ 非负可测函数→ 可测函数.

- $X$ 的可测划分/分割: $\{A_i\}$, $i=1,\cdots,n$ 或$i=1,2,\cdots$ 满足

$$\mu(A_i\cap A_j)=0,\ \forall i\neq j \quad \text{且} \quad \mu\left(\left(\bigcup_i A_i\right)^c\right)=0.$$

- 非负简单函数: $\{A_i: i=1,\cdots,n\}$ 为$X$ 的划分, $a_i\geqslant 0$, $\forall i$,

$$f=\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{I}_{A_i}.$$

- $f$ 的积分

$$\int_X f\mathrm{d}\mu := \sum_{i=1}^n a_i\mu(A_i).$$

- 良定: 若还有$f=\sum_{j=1}^m b_j\mathbf{I}_{B_j}$, 则

$$\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m a_i\mu(A_i\cap B_j)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^m b_j\mu(A_i\cap B_j).$$

**命题 (命题3.1.1)**

(1) $\int_X \mathbf{I}_A \mathrm{d}\mu = \mu(A), \quad \forall A \in \mathscr{F};$

(2) $\int_X f \mathrm{d}\mu \geqslant 0;$

(3) $\int_X (af) \mathrm{d}\mu = a \int_X f \mathrm{d}\mu, \quad \forall a \geqslant 0;$

(4) $\int_X (f+g) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu;$

(5) $f \geqslant g$, 则$\int_X f \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X g \mathrm{d}\mu;$

- (4), (5): $\{A_i \cap B_j : i \leqslant n, j \leqslant m\}$ 为划分, 在$A_i \cap B_j$ 上,

$$f + g = a_i + b_j, \quad f = a_i, \quad g = b_j.$$

## 命题 (命题3.1.1(续))

(6) $f_n \uparrow$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n \geqslant g$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X g \mathrm{d}\mu$.

- (6) $\forall \alpha \in (0,1)$, $A_n(\alpha) := \{f_n \geqslant \alpha g\} \uparrow X$. 则

$$f_n \mathbf{I}_{A_n(\alpha)} \geqslant \alpha g \mathbf{I}_{A_n(\alpha)}.$$

- 记$g = \sum_{j=1}^m b_j \mathbf{I}_{B_j}$. 则

$$\int_X f_n \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X f_n \mathbf{I}_{A_n(\alpha)} \mathrm{d}\mu \geqslant \alpha \int_X g \mathbf{I}_{A_n(\alpha)} \mathrm{d}\mu$$
$$= \alpha \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j \cap A_n(\alpha)) \uparrow \alpha \int_X g \mathrm{d}\mu.$$

- 令$\alpha \to 1$ 即可.

# 非负可测函数的积分

- 假设$f$ 非负可测. 则,

$$\exists \text{ 非负简单的 } f_1, f_2, \cdots \text{ 使得 } f_n \uparrow f.$$

- $f$ 的积分定义为:

$$\int_X f\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_X g\mathrm{d}\mu : g \text{ 非负简单且 } g \leqslant f\right\}.$$

- 积分的性质:

**命题 (命题3.1.2)**

(1) 若$f$ 非负简单, 则两个定义一致.

## 命题 (命题3.1.2(续))

(2) 若$\{f_n\}$ 非负简单且$f_n \uparrow f$, 则$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu$.

(3) $\star = \lim\limits_{n\to\infty}\left[\sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\mu(\{\frac{k}{2^n}\leqslant f<\frac{k+1}{2^n}\})+n\mu(\{f\geqslant n\})\right]$;

- (2) “$\leqslant$”：由定义, $\int_X f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f \mathrm{d}\mu$.
- “$\geqslant$”：$f_n \uparrow f \geqslant g$, 故$\lim_{n\to\infty}\int_X f_n \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X g \mathrm{d}\mu$.
- (3) 取$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\mathbf{I}_{\{\frac{k}{2^n}\leqslant f<\frac{k+1}{2^n}\}}+n\mathbf{I}_{\{f\geqslant n\}}$ 即可.
- (3)$'$ 取如下的$f_n$ 亦可.

$$f_n = \sum_{k=1}^{n2^n-1}\frac{k}{2^n}\mathbf{I}_{\{\frac{k}{2^n}<f\leqslant\frac{k+1}{2^n}\}}+n\mathbf{I}_{\{f>n\}}.$$

- $\int_X f \mathrm{d}\mu$ 本质上只依赖于$\mu|_{\sigma(f)}$：若$f\in\mathscr{G}\subseteq\mathscr{F}$, 则
  $f$ 在$(X,\mathscr{G},\mu|_{\mathscr{G}})$, $(X,\mathscr{F},\mu)$ 上的积分相等.

## 命题 (命题3.1.2(续))

(4) $\int_X f \mathrm{d}\mu \geqslant 0$;

(5) $\int_X (af) \mathrm{d}\mu = a \int_X f \mathrm{d}\mu$;

(6) $\int_X (f+g) \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu$;

(7) 若$f \geqslant g$, 则$\int_X f \ \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X g \mathrm{d}\mu$.

- (4) $\int_X f \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X g \mathrm{d}\mu$, $\forall g$ 非负简单且$\leqslant f$.
- (5) $\int_X (af_n) \mathrm{d}\mu = a \int_X f_n \mathrm{d}\mu$, $\forall f_n$ 非负简单且$\uparrow f$.
- (6) $\int_X (f_n + g_n) \mathrm{d}\mu = \int_X f_n \mathrm{d}\mu + \int_X g_n \mathrm{d}\mu$, $\forall f_n$ 非负简单且$\uparrow f$, $g_n$ 非负简单且$\uparrow g$.
- (7) 由定义便知.

定义3.1.1.

- 若
$$\min\{\int_X f^+\mathrm{d}\mu, \int_X f^-\mathrm{d}\mu\} < \infty,$$
则称$f$ 的积分存在或积分有意义.
- 若
$$\max\{\int_X f^+\mathrm{d}\mu, \int_X f^-\mathrm{d}\mu\} < \infty,$$
则称$f$ 可积.
- 上述两种情况下, 将$f$ 的积分或积分值定义为
$$\int_X f\mathrm{d}\mu := \int_X f^+\mathrm{d}\mu - \int_X f^-\mathrm{d}\mu.$$
- 注: 各种记号, $\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X f(x)\mathrm{d}\mu(x) = \int_X f(x)\mu(\mathrm{d}x)$.

- $\forall A \in \mathscr{F}$, $(A, \mathscr{F}_A, \mu_A)$ 为测度空间.

$$\mathscr{F}_A = \{AB : B \in \mathscr{F}\}, \quad \mu_A = \mu|_{\mathscr{F}_A}.$$

- $f$ 在$A \in \mathscr{F}$ 上的积分定义为

$$\int_A f \mathrm{d}\mu := \int_A f|_A \mathrm{d}\mu_A = \int_X f \mathbf{I}_A \mathrm{d}\mu.$$

- 例. L-S 积分. $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \lambda_F)$, 其中$F$ 为准分布函数,

$$\int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}F = \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}F(x) = \int_{\mathbb{R}} g(x)F(\mathrm{d}x) := \int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\lambda_F.$$

- 特别地, L 积分, $F(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. $\lambda$: L 测度,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}} g\mathrm{d}\lambda, \quad \int_A g(x)\mathrm{d}x := \int_{\mathbb{R}} g(x)\mathbf{I}_A(x)\mathrm{d}x.$$

- 例. 离散型. $X=\{x_1,x_2,\cdots\}$, $\mu(\{x_i\})=a_i$, $\forall i$.

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\sum_{i=1}^{\infty}f(x_i)a_i,$$

积分存在/有意义iff 级数有意义, 可积iff 级数绝对收敛.

## 定理 (定理3.1.3)

(1) 若$f$ 的积分存在，则$\left|\int_X f\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int_X |f|\mathrm{d}\mu$;

(2) $f$ 可积当且仅当$|f|$ 可积;

(3) 若$f$ 可积，则$|f| < \infty$ a.e..

- (1) $|f| \geqslant f^+, f^-$, 且

$$-\int_X f^-\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f^+\mathrm{d}\mu - \int_X f^-\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f^+\mathrm{d}\mu.$$

- (2) $\Leftarrow$: 由$\star$ 知. $\Rightarrow$: $|f| = f^+ + f^-$.
- (3) 不妨设$f \geqslant 0$. $f \geqslant f\mathbf{I}_{\{f=\infty\}}$, 故

$$\int_X f\mathrm{d}\mu \geqslant \int_X f\mathbf{I}_{\{f=\infty\}}\mathrm{d}\mu \geqslant n \times \mu(f = \infty), \quad \forall n.$$

## 定理 (定理3.1.4)

(1) 若$f$ 积分存在，则$\int_A f\mathrm{d}\mu = 0$, $\forall$ 零测集$A$;

(2) 若$f, g$ 积分存在且$f \geqslant g$ a.e., 则$\int_X f\mathrm{d}\mu \geqslant \int_X g\mathrm{d}\mu$;

(3) 若$f = g$ a.e., 则积分同时存在/不存在，且$\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X g\mathrm{d}\mu$.

- (1) $f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{I}_{A_i}$ 非负简单 → 非负可测→ 一般可测.

$f\mathbf{I}_A = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{I}_{A_i A} + 0\mathbf{I}_{A^c} \Rightarrow \int_X f\mathbf{I}_A \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i A) = 0.$

- (2) 设$f, g \geqslant 0$. 记$A = \{f < g\}$, 则$\mu(A) = 0$. 故

$\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathbf{I}_A \mathrm{d}\mu + \int_X f\mathbf{I}_{A^c} \mathrm{d}\mu \geqslant \int_X g\mathbf{I}_{A^c} \mathrm{d}\mu = \int_X g\mathrm{d}\mu.$

- $f \geqslant g$ a.e. $\Rightarrow f^+ \geqslant g^+$ a.e. 且$f^- \leqslant g^-$ a.e..
- (3) $f^{\pm} = g^{\pm}$ a.e..
- 注: $f$ a.e. 定义，延拓为$\tilde{f}$, $\int_X f d\mu := \int_X \tilde{f} d\mu$.

**推论 (推论3.1.5)**

若 $f=0$ a.e., 则 $\int_X f\mathrm{d}\mu=0$;

反之, 若 $f\geqslant 0$ a.e. 且 $\int_X f\mathrm{d}\mu=0$, 则 $f=0$ a.e..

- $\int_X f\mathrm{d}\mu=\int_X \mathbf{0}\mathrm{d}\mu=0$.
- 反之, $\forall n\geqslant 1$, $f\geqslant f\mathbf{I}_{\{f\geqslant \frac{1}{n}\}}$.

$$\int_X f\mathrm{d}\mu\geqslant\int_X f\mathbf{I}_{\{f\geqslant\frac{1}{n}\}}\mathrm{d}\mu\geqslant\int_X\frac{1}{n}\mathbf{I}_{\{f\geqslant\frac{1}{n}\}}\mathrm{d}\mu=\frac{1}{n}\mu(f\geqslant\frac{1}{n}).$$

- $\mu(f\geqslant\frac{1}{n})=0$, $\forall n$. 故, $\mu(f>0)=0$.

**定理 (定理3.2.1, 线性)**

设$f, g$ 的积分存在.

(1) $\forall a \in \mathbb{R}$, $af$ 的积分存在且$\int_X (af)\mathrm{d}\mu = a\int_X f\mathrm{d}\mu$;

(2) 若$\int_X f\mathrm{d}\mu + \int_X g\mathrm{d}\mu$ 有意义, 则$f+g$ a.e.有意义, 积分存在且

$$\int_X (f+g)\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu + \int_X g\mathrm{d}\mu.$$

- (1) 若$a=0$ 则$af = \mathbf{0}$, 故✓.
- 若$a>0$, 则$(af)^+ = af^+$, $(af)^- = af^-$, 故✓.
- 若$a<0$, 则$(af)^+ = (-a)(-f)^+ = (-a)f^-$,

  $(af)^- = (-a)(-f)^- = (-a)f^+$, 故✓.

**定理 (定理3.2.1, 线性)**

设$f,g$ 的积分存在.

(2) 若$\int_X f\mathrm{d}\mu+\int_X g\mathrm{d}\mu$ 有意义, 则$f+g$ a.e.有意义, $\cdots\cdots$

- (2.a) 往证$f+g$ a.e.有意义.
- 若$|f|<\infty$, a.e., 则✓.
- 若$\mu(f=\infty)>0$, 则$\int_X f\mathrm{d}\mu=\infty$.
- 于是 $\int_X g\mathrm{d}\mu\neq-\infty$, 故$\mu(g=-\infty)=0$.
- 故, $\mu(f=\infty,g=-\infty)=0$, 同理, $\mu(f=-\infty,g=\infty)=0$.

## 定理 (定理3.2.1, 线性)

(2) 设$f, g$ 的积分存在. 若$\int_X f\mathrm{d}\mu + \int_X g\mathrm{d}\mu$ 有意义, 则$f+g$ a.e. 有意义(✓), 积分存在且$\int_X (f+g)\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu + \int_X g\mathrm{d}\mu$.

- (2.b) 往证积分存在且$\int_X (f+g)\mathrm{d}\mu = \int_X f\mathrm{d}\mu + \int_X g\mathrm{d}\mu$.
- 分析: 全化为非负可测函数.

$$f+g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-) = (f^+ + g^+) - (f^- + g^-).$$

- 记 $\varphi = f^+ + g^+$, $\psi = f^- + g^-$. 目标:

$$\int_X (f+g)\mathrm{d}\mu = \int_X (\varphi - \psi)\mathrm{d}\mu = \int_X \varphi\mathrm{d}\mu - \int_X \psi\mathrm{d}\mu.$$

- (i) 不出现$\infty - \infty$;
- (ii) 若$\varphi, \psi \geqslant 0$ 且(i) 成立, 则

$$\int_X (\varphi - \psi)\mathrm{d}\mu = \int_X \varphi\mathrm{d}\mu - \int_X \psi\mathrm{d}\mu.$$

往证(i): 不出现$\infty - \infty$.

- $\varphi = f^+ + g^+$, $\psi = f^- + g^-$.
- 若$\int_X \varphi \mathrm{d}\mu < \infty$, 则$\varphi < \infty$ a.e., ✓.
- 若$\int_X \varphi \mathrm{d}\mu = \infty$, 即$\int_X f^+ \mathrm{d}\mu = \infty$ 或$\int_X g^+ \mathrm{d}\mu = \infty$. 由积分都存在且$\int_X f \mathrm{d}\mu + \int_X g \mathrm{d}\mu$ 有意义知$\int_X f^- \mathrm{d}\mu$, $\int_X g^- \mathrm{d}\mu < \infty$.
- 从而, ✓:

$$f^-, g^-, \psi < \infty \text{ a.e.} \quad 且 \quad \int_X \psi \mathrm{d}\mu < \infty.$$

- 总结:

$$\varphi - \psi \text{ a.e. 有意义且 } \int_X \varphi \mathrm{d}\mu - \int_X \psi \mathrm{d}\mu \text{ 有意义.}$$

往证(ii): 若$\varphi, \psi \geqslant 0$ 且不出现$\infty - \infty$, 则

$$\int_X (\varphi - \psi) \mathrm{d}\mu = \int_X \varphi \mathrm{d}\mu - \int_X \psi \mathrm{d}\mu.$$

- $\varphi - \psi$ 积分存在: $(\varphi - \psi)^+ \leqslant \varphi$, $(\varphi - \psi)^- = (\psi - \varphi)^+ \leqslant \psi$.
- $\max\{\varphi, \psi\} = \psi + (\varphi - \psi)^+ = \varphi + (\psi - \varphi)^+$. 故

$$\int_X \psi \mathrm{d}\mu + \int_X (\varphi - \psi)^+ \mathrm{d}\mu \overset{(*)}{=} \int_X \varphi \mathrm{d}\mu + \int_X (\varphi - \psi)^- \mathrm{d}\mu.$$

- 若$\int_X \psi \mathrm{d}\mu < \infty$, 则 $\int_X (\varphi - \psi)^- \mathrm{d}\mu < \infty$, 直接移项即可.
- 若$\int_X \psi \mathrm{d}\mu = \infty$, 则$\int_X \varphi \mathrm{d}\mu < \infty$. 由$(*)$, $\int_X (\varphi - \psi)^- \mathrm{d}\mu = \infty$.
- 于是 $\int_X (\varphi - \psi)^+ \mathrm{d}\mu < \infty$. 移内侧两项再反号即可.

## 定理 (定理3.2.2)

设$f, g$ 可积.

(1) 若$\int_A f\mathrm{d}\mu \geqslant \int_A g\mathrm{d}\mu,\ \forall A \in \mathscr{F}$, 则$f \geqslant g$ a.e.;

(2) 若$\int_A f\mathrm{d}\mu = \int_A g\mathrm{d}\mu,\ \forall A \in \mathscr{F}$, 则$f = g$ a.e..

- (1) 取$B = \{f < g\}$. 则$(g - f)\mathbf{I}_B \geqslant 0$, 故

$$\int_B (g - f)\mathrm{d}\mu = \int_B (g - f)\mathbf{I}_B\mathrm{d}\mu \geqslant 0.$$

- 又$\int_B (g - f)\mathrm{d}\mu = \int_B g\mathrm{d}\mu - \int_B f\mathrm{d}\mu \leqslant 0.$
- 综上, $\int_X (g - f)\mathbf{I}_B\mathrm{d}\mu = 0$. 又$\star$, 故$(g - f)\mathbf{I}_B = 0$ a.e.. 从而

$$\mu(B) = \mu\big((g - f)\mathbf{I}_B > 0\big) = 0 \Rightarrow g \leqslant f \text{ a.e..}$$

- (2) $f \geqslant g$ a.e. 且$g \geqslant f$ a.e., 故$f = g$ a.e..

## 定理 (定理3.2.3, 积分的绝对连续性)

若$f$ 可积, 则$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ 使得$\forall A \in \mathscr{F}$,

$$\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A |f| \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

- 取非负简单的$g_n \uparrow |f|$.
- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ 使得

$$\int_X (|f| - g_N) \mathrm{d}\mu = \int_X |f| \mathrm{d}\mu - \int_X g_N \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$\Rightarrow \int_A (|f| - g_N) \mathrm{d}\mu = \int_X (|f| - g_N) \mathbf{I}_A \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall A \in \mathscr{F}.$$

- 令$M = \max_{x \in X} g_N(x)$. 取$\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$, 则

$$\int_A |f| \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \int_A g_N \mathrm{d}\mu = \frac{\varepsilon}{2} + M\mu(A) < \varepsilon.$$

## 定理 (定理3.2.4, 单调收敛定理, Levi定理)

设$\{f_n,\ n=1,2,\cdots\}$, $f$ 均非负可测. 若$f_n\uparrow f$ a.e., 则

$$\int_X f_n\ \mathrm{d}\mu \uparrow \int_X f\ \mathrm{d}\mu.$$

- 不妨设(去掉统一的零测集后) $0\leqslant f_n(x)\uparrow f(x)$, $\forall x$.
- 取非负简单$f_{n,k}\uparrow f_n$.
- 令$g_k=\max\limits_{1\leqslant n\leqslant k} f_{n,k}$. $g_k$ 非负简单, 且$g_k\uparrow g$:
  $$g_k\leqslant \max_{1\leqslant n\leqslant k} f_{n,k+1}\leqslant \max_{1\leqslant n\leqslant k+1} f_{n,k+1}=g_{k+1}.$$
- $g_k\leqslant \max\limits_{1\leqslant n\leqslant k} f_n=f_k\Rightarrow g\leqslant f$.
- $g_k\geqslant f_{n,k}$, $\forall k\geqslant n$. 故$g\geqslant f_n$, $\forall n\Rightarrow g\geqslant f$. 故$g=f$.
- $\int_X g_k\mathrm{d}\mu\uparrow\int_X g\mathrm{d}\mu=\int_X f\mathrm{d}\mu$.
- $\int_X g_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_X f_n\mathrm{d}\mu\leqslant\int_X g\mathrm{d}\mu$, 故$\int_X f_n\mathrm{d}\mu\uparrow\int_X f\mathrm{d}\mu$..

## 推论 (推论3.2.5)

若$f$ 的积分存在，则

$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{A_n} f\mathrm{d}\mu, \quad \forall \text{ 可测划分}\{A_n, n=1,2,\cdots\}.$$

- 证：$f_n := f^+\mathbf{I}_{A_1+\cdots+A_n} \uparrow f^+, \quad g_n := f^-\mathbf{I}_{A_1+\cdots+A_n} \uparrow f^-.$
- $\int_X f_n\mathrm{d}\mu \uparrow \int_X f^+\mathrm{d}\mu, \quad \int_X g_n\mathrm{d}\mu \uparrow \int_X f^-\mathrm{d}\mu.$
- 于是，

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{A_n} f\mathrm{d}\mu = \int_X f_n\mathrm{d}\mu - \int_X g_n\mathrm{d}\mu \to \int_X f\mathrm{d}\mu.$$

## 定理 (定理3.2.6, Fatou引理)

若$\{f_n, n=1,2,\cdots\}$ a.e. 非负可测，则

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$

- $g_k := \inf_{n\geqslant k} f_n \uparrow g := \liminf_{n\to\infty} f_n$.
- $\int_X g_k \mathrm{d}\mu \uparrow \int_X g \mathrm{d}\mu$.
- $g_k \leqslant f_k \Rightarrow \int_X g_k \mathrm{d}\mu \leqslant \int_X f_k \mathrm{d}\mu$.
- 故，

$$\int_X g \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_X f_k \mathrm{d}\mu.$$

- 推论3.2.7. 若∃可积的$g$ 使得$f_n \geqslant g$, 则$\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ 积分存在且

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

若∃可积的$g$ 使得$f_n \leqslant g$, 则$\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ 积分存在且

$$\int_X \limsup_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \geqslant \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

- 考虑$f_n - g$ 或$g - f_n$ 即可.

## 定理 (定理3.2.8, Lebesgue控制收敛定理)

假设$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或$f_n \xrightarrow{\mu} f$.

若存在非负可积的$g$ 使得$|f_n| \leqslant g, \forall n \geqslant 1$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X f \, \mathrm{d}\mu.$$

- 设$\star\star$. $f_n \geqslant -g, \forall n$, 故
$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$
- $f_n \leqslant g, \forall n$, 故
$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \geqslant \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu.$$
- 设$\star\star$. $\forall$ 子列$\{n_k\}$, $\exists$ 其子列$\{n'\}$ 使得$f_{n'} \xrightarrow{\text{a.u.}} f$, 从而$f_{n'} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 故$\int_X f_{n'} \mathrm{d}\mu \to \int_X f \mathrm{d}\mu$. 因此$\int_X f_n \mathrm{d}\mu \to \int_X f \mathrm{d}\mu$.

**推论 (推论3.2.9, (Lebesgue)有界收敛定理)**

设$\mu$ 是有限的测度, $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或$f_n \xrightarrow{\mu} f$. 若∃ 常数$M$ 使得$|f_n| \leqslant M$, $\forall n \geqslant 1$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \mathrm{d}\mu = \int_X f \mathrm{d}\mu.$$

- 取$g \equiv M$. 可积: $\int_X |g| \mathrm{d}\mu = M\mu(X) < \infty$.
- 注: 此时, ⋆⋆ ⇒ ⋆⋆. 设$\mu(X) > 0$, 则$P(\cdot) := \frac{\mu(\cdot)}{\mu(X)}$ 为概率. ⋆⋆ 即为$f_n \xrightarrow{\text{a.s.}} f$, ⋆⋆ 即为$f_n \xrightarrow{P} f$.

## 定理 (定理3.2.10, 积分变换公式)

设$g:(X,\mathscr{F},\mu)\to(Y,\mathscr{S})$. 对任意$(Y,\mathscr{S})$ 可测的$f$, 若等式

$$\int_Y f\mathrm{d}\mu\circ g^{-1}=\int_X f\circ g\mathrm{d}\mu$$

之一端有意义, 则另一端也有意义, 且等式成立.

- 注: $\nu=\mu\circ g^{-1}:B\mapsto\mu(g^{-1}B)$.
- 典型方法: $f$ 为非负简单 $\to$ 非负可测$\to$ 一般可测.
- 若$f=\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{I}_{A_i}$, 则$f\circ g=\sum_{i=1}^n a_i\mathbf{I}_{g^{-1}A_i}$

$$\mathrm{LHS}=\sum_{i=1}^n a_i\ \nu(A_i),\quad \mathrm{RHS}=\sum_{i=1}^n a_i\ \mu(g^{-1}A_i).$$

例. 随机变量及其函数的期望.

- 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间. $\xi$ 是随机变量(r.v.).
- 定义3.4.1. 若$\int_\Omega \xi \mathrm{d}P$ 存在, 则称其为$\xi$ 的(数学)期望, 记为$\mathrm{E}(\xi)$ 或$\mathrm{E}\xi$.
- 积分存在 iff 期望存在; 可积 iff 期望有限.
- 定理3.4.1 (r.v.的函数的期望). 若$f$ 是$(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R})$ 上的可测函数, 则$f(\xi)$ 是$(\Omega, \mathscr{F})$ 上的可测函数, 且

$$\mathrm{E}f(\xi) = \int_\mathbb{R} f \mathrm{d}F_\xi.$$

## §3.3 空间$L_p(X, \mathscr{F}, \mu)$

- $(X, \mathscr{F}, \mu)$ 是测度空间.
- 设$f, g, \cdots$ 是$(X, \mathscr{F})$ 上的可测函数.

- 设$1 \leqslant p < \infty$. 令

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}, \quad L_p := \left\{f : \|f\|_p < \infty\right\}.$$

- 各种记号

$$L_p(\mu),\ L_p(\mathscr{F}),\ L_p(X, \mathscr{F}, \mu).$$

- $f \in L_1$ iff $f$ 可积. $\|f\|_1 =: \|f\|$.
- $f \in L_p \Leftrightarrow f^p \in L_1 \Rightarrow f$ 有限a.e..
- 线性空间: $f \in L_p, a \in \mathbb{R} \Rightarrow af \in L_p$ ✓;

$$f, g \in L_p \Rightarrow f + g \in L_p?$$

## 引理 (引理3.3.1)

设$1 \leqslant p < \infty$. 令$C_p = 2^{p-1}$, 则

$$|a+b|^p \leqslant C_p(|a|^p + |b|^p), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

- 不妨设$a, b > 0$, $p > 1$, 否则显然.
- 记$x = \frac{a}{a+b}$. 只需证

$$f(x) := C_p\left(x^p + (1-x)^p\right) \geqslant 1, \quad \forall x \in (0,1).$$

- $f'(x) = C_p p\left(x^{p-1} - (1-x)^{p-1}\right)$, 故$f(x) \geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)$.
- 当$C_p := 2^{p-1}$ 时, $f(\frac{1}{2}) = 1$.
- 注: 因此, $L_p$ 是线性空间.

## 引理 (引理3.3.2)

设$1 < p, q < \infty$ 且$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 则下式成立, 等号成立*iff* $a = b$.

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \quad \forall a, b \geqslant 0.$$

- 注: 称$q = \frac{p}{p-1}$ 为$p$ 的共轭数, 或$p, q$ 为(一对)共轭数.
- 不妨设$a, b > 0$, 否则显然. 两边除以$b$, 则不等式等价于

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{p} \cdot \frac{a}{b} + \frac{1}{q}, \ \forall a, b > 0 \Rightarrow x^{\alpha} \leqslant \alpha x + (1 - \alpha), \ \forall x > 0.$$

- $0 < \alpha < 1$. 令$f(x) := \alpha x + 1 - \alpha - x^{\alpha}$, 则

$$f'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha - 1} = \alpha(1 - \frac{1}{x^{1-\alpha}})$$

$$\Rightarrow f(x) > f(1) = 0, \ \forall x > 0, x \neq 1.$$

## 定理 (定理3.3.3, Holder不等式)

设$1 < p, q < \infty$ 且$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则

$$\|fg\| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q, \quad \forall f \in L_p,\ g\text{可测}.$$

- 不妨设$\|f\|_p > 0$, $0 < \|g\|_q < \infty$, 否则显然. 取

$$a = \left(\frac{|f|}{\|f\|_p}\right)^p = \frac{|f|^p}{\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu}, \quad b = \left(\frac{|g|}{\|g\|_q}\right)^q = \frac{|g|^q}{\int_X |g|^q \mathrm{d}\mu}.$$

- $a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q}$, 即

$$\frac{|fg|}{\|f\|_p \|g\|_q} \leqslant \frac{1}{p}\cdot \star + \frac{1}{q}\cdot \star \Rightarrow \int_X \star \mathrm{d}\mu \leqslant 1.$$

- 当$f \in L_p$, $g \in L_q$ 时, 等号成立当且仅当$a = b$, 即

  ♠: 存在不全为0 的$\alpha, \beta \geqslant 0$ 使得$\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ a.e..

## 定理 (定理3.3.4, Minkowski不等式)

设$1 \leqslant p < \infty$. 则

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p, \quad \forall f, g \in L_p.$$

等号成立的充要条件: (1) $p=1$: $fg \geqslant 0$; (2) $p>1$:

$\tilde{\spadesuit}$: 存在不全为0 的$\alpha, \beta \geqslant 0$ 使得$\alpha f = \beta g$ a.e..

- 设$p=1$. $|f+g| \leqslant |f| + |g|$, 等号成立当且仅当$fg \geqslant 0$.
- 设$p>1$, 记$q = \frac{p}{p-1}$.

$$|f+g|^p \leqslant |f| \cdot |f+g|^{p-1} + |g| \cdot |f+g|^{p-1}$$

$$\Rightarrow \|f+g\|_p^p \leqslant (\|f\|_p + \|g\|_q) \, \||f+g|^{p-1}\|_q.$$

- $\||f+g|^{p-1}\|_q = \left(\int_X |f+g|^p \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}} = \|f+g\|_p^{p \cdot \frac{1}{q}}$.

- 设$\mathbb{X}$ 为线性空间. 若$\|\cdot\|:\mathbb{X}\to\mathbb{R}$ 满足:
  (1) 非负性: $\|\vec{x}\|\geqslant 0$, 等号成立当且仅当$\vec{x}=\vec{0}$;
  (2) $\|a\vec{x}\|=|a|\|\vec{x}\|,\ \ \forall a\in\mathbb{R}, \forall\vec{x}\in\mathbb{X}$;
  (3) 三角不等式: $\|\vec{x}+\vec{y}\|\leqslant\|\vec{x}\|+\|\vec{y}\|,\ \ \forall\vec{x},\vec{y}\in\mathbb{X}$,
  则称$\|\cdots\|$ 为$\mathbb{X}$ 上的范数, 称$(\mathbb{X},\|\cdot\|)$ 为线性赋范空间.
- 为了满足$\star\star$, 需考虑

$$\text{等价关系} f \overset{\mu}{\sim} g:\ f=g,\ \mu\text{-a.e.}.$$

- 设$1\leqslant p<\infty$, 则$(L_p/\overset{\mu}{\sim},\|\cdot\|_p)$ 为线性赋范空间.
- 注: 视$\mu$-a.e. 相等的函数为同一个元, 将$L_p/\overset{\mu}{\sim}$ 仍记为$L_p$.

- $p=\infty$:

$$\|f\|_\infty := \inf\{a\in\mathbb{R} : \mu(|f|>a)=0\}, \quad L_\infty := \{f : \|f\|_\infty < \infty\}.$$

**定理 (定理3.3.5, Holder不等式, Minkowski不等式)**

$$\|fg\| \leqslant \|f\|\cdot\|g\|_\infty, \quad \forall f\in L_1, g\in L_\infty,$$

$$\|f+g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

- 证: $\int_X |fg|\mathrm{d}\mu \leqslant \int_X |f|\cdot\|g\|_\infty \mathrm{d}\mu = \|f\|\cdot\|g\|_\infty$.
- $|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)|+|g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, a.e..
- 注: $(L_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ 为线性赋范空间.
- 线性空间中的范数$\|\cdot\|$ 可诱导距离 $\rho(\cdot,\cdot)$:

$$\rho(f,g) := \|f-g\|.$$

**定理 (定理3.3.8, 完备性)**

设$1 \leqslant p \leqslant \infty$. 若$\{f_n\} \subseteq L_p$ 满足 $\lim\limits_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_p = 0$, 则$\exists f \in L_p$ 使得$\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$.

- 注: $(L_p, \|\cdot\|_p)$ 中的Cauchy 列收敛.
- 取$n_1 < n_2 < \cdots$ 使得

$$\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2^k}, \quad \forall n, m \geqslant n_k.$$

- $g :=\uparrow \lim\limits_{k\to\infty} g_k$, 其中

$$g_k := |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{k} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| \in L_p,\ \text{且} g_k \geqslant 0.$$

- $g = |f_{n_1}| + \sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$. $g \in L_p$:

$$\|g_k\|_p \leqslant \|f_{n_1}\|_p + \sum_{i=1}^{k} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_p \leqslant \|f_{n_1}\|_p + 1,$$

$$\Rightarrow \|g\|_p = \uparrow \lim_{k\to\infty} \|g_k\|_p \leqslant \|f_{n_1}\|_p + 1, \quad (1 \leqslant p \leqslant \infty.)$$

- $|g| < \infty$ a.e., 即, $f_{n_1} + \sum_{i=1}^{\infty}(f_{n_{i+1}} - f_{n_i})$ a.e. 绝对收敛, 故

$$f := \lim_{k\to\infty} f_{n_k} \text{ a.e. 存在且 } |f| \leqslant g \Rightarrow f \in L_p.$$

- $\|f_n - f\|_p \to 0$: $p=\infty$ 时,

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \|f_n - f_{n_k}\|_\infty + \|f_{n_k} - f\|_\infty,$$

$$\text{其中,}\quad |f_{n_k}(x) - f(x)| \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} |f_{n_{i+1}}(x) - f_{n_i}(x)|$$

$$\Rightarrow \|f_{n_k} - f\|_\infty \leqslant \sum_{i=k+1}^{\infty} \|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

- $\|f_n - f\|_p \to 0$: $1 \leqslant p < \infty$ 时,

$$\|f_n - f\|_p^p = \int_X |f_n - f|^p \mathrm{d}\mu = \int_X \lim_{k\to\infty} |f_n - f_{n_k}|^p \mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_X |f_n - f_{n_k}|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon.$$

- 设$1 \leqslant p \leqslant \infty$. 则

$(L_p, \|\cdot\|_p)$ 是Banach 空间(完备的线性赋范空间).

- 内积与范数. 极化等式:

$$\|\vec{x}\|^2 = \langle \vec{x}, \vec{x} \rangle, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right).$$

- 习题三、15. 设$p = 2$. 则如下定义的$\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为内积.

$$\langle f, g \rangle := \int_X fg \mathrm{d}\mu.$$

- 设$p = 2$.

$(L_2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 是Hilbert 空间(完备的内积空间).

- 设$0 < p < 1$. 令

$$\|f\|_p := \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu, \quad L_p := \{f : \|f\|_p < \infty\}.$$

- 引理3.3.6. 设$0 < p < 1$. 令$C_p = 1$, 则

$$|a+b|^p \leqslant C_p(|a|^p + |b|^p), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

- 证: $f(x) := C_p(x^p + (1-x)^p) \geqslant 1, \forall x \in (0,1)$.

$$f'(x) = C_p p\left(\frac{1}{x^{1-p}} - \frac{1}{(1-x)^{1-p}}\right) \Rightarrow f \text{ 先} \uparrow \text{ 后} \downarrow.$$

故, $f(x) \geqslant f(0) = f(1) = C_p$. 取$C_p = 1$ 即可.

- 注: 因此, $L_p$ 是线性空间.

- 定理3.3.7 (Minkowski不等式). 设$0 < p < 1$, 则

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

- $\rho(\cdot,\cdot)$ 仍是距离, 但此时, $\|\cdot\|_p$ 不是范数:

$$\rho(f,g) := \|f-g\|_p, \quad \|af\|_p = |a|^p \cdot \|f\|_p.$$

- 定理3.3.8. 设$0 < p < 1$, 则$(L_p, \|\cdot\|)$ 是完备的距离空间.

## $f_n \xrightarrow{L_p} f$

- 设$0 < p \leqslant \infty$. 设$f, f_1, f_2, \cdots \in L_p$.

$$\text{若}\|f_n - f\|_p \to \infty, \text{则记} f_n \xrightarrow{L_p} f.$$

- 若$0 < p < \infty$, 则称$f_n \xrightarrow{L_p} f$ 为$\{f_n\}$ ($p$ 阶) 平均收敛到$f$.
- 若$p = \infty$, 则$f_n \xrightarrow{L_\infty} f$ 等价于$\{f_n\}$ 几乎处处一致收敛到$f$.

## 定理 (定理3.3.9)

设$0 < p < \infty$, $f, f_1, f_2, \cdots \in L_p$.

(1) 若$f_n \xrightarrow{L_p} f$, 则$f_n \xrightarrow{\mu} f$ 且$\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

(2) 若$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 或$f_n \xrightarrow{\mu} f$, 则$\|f_n\|_p \to \|f\|_p \Leftrightarrow f_n \xrightarrow{L_p} f$.

- (1) $A := \{|f_n - f| > \varepsilon\}$,

$$\mu(A) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \int_X |f_n - f|^p \mathbf{I}_A \mathrm{d}\mu \leqslant \frac{1}{\varepsilon^p} \|f_n - f\|_p^p \to 0.$$

- $\big|\|f_n\|_p - \|f\|_p\big| \leqslant \|f_n - f\|_p \to 0$:

$$\|f_n\|_p \leqslant \|f\|_p + \|f_n - f\|_p, \quad \|f\|_p \leqslant \|f_n\|_p + \|f_n - f\|_p.$$

- (2) $\Leftarrow$: ✓.

  $\Rightarrow$: 设$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ 且$\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, 往证$f_n \xrightarrow{L_p} f$.

- 由$|a+b|^p \leqslant C_p(|a|^p + |b|^p)$ 知

$$g_n := C_p(|f_n|^p + |f|^p) - |f_n - f|^p \geqslant 0.$$

- $g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} 2C_p|f|^p$, 故$f_n \xrightarrow{L_p} f$:

$$\int_X 2C_p|f|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X g_n \mathrm{d}\mu$$
$$= 2C_p \int_X |f|^p \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - f|^p \mathrm{d}\mu.$$

- 改为设$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$. 对任意子列, 存在其子列$f_{n'} \xrightarrow{\text{a.e.}} f$, 于是$\|f_{n'} - f\|_p \to 0$. 因此$\|f_n - f\|_p \to 0$.

- 定义3.3.1. 设$1 < p < \infty$. 设$f, f_1, f_2, \cdots \in L_p$. 若

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n g \mathrm{d}\mu = \int_X f g \mathrm{d}\mu, \quad \forall g \in L_q,$$

则称$\{f_n\}$ 在$L_p$ 中弱收敛到$f$, 记为$f_n \xrightarrow{(w)L_p} f$.

- 定义3.3.1(续). 设$p = 1$ 且$(X, \mathscr{F}, \mu)$ 为$\sigma$ 有限测度空间. $**$, 则称$\{f_n\}$ 在$L_1$ 中弱收敛到$f$, 记为$f_n \xrightarrow{(w)L_p} f$.

- 若

$$\sup_{t\in T} \|f_t\|_p =: M < \infty,$$

则称$\{f_t, t \in T\}$ 在$L_p$ 中有界.

定理 (定理3.3.10)

设$1 < p < \infty$, $\{f_n\} \subseteq L_p$ 且存在$M$ 使得$\|f_n\|_p \leqslant M$, $\forall n$.
若$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ (或$f_n \xrightarrow{\mu} f$), 则$f \in L_p$ 且$f_n \xrightarrow{(w)L_p} f$.

- $\|f\|_p \leqslant M$:

$$\int_X |f|^p \mathrm{d}\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_X |f_n|^p \mathrm{d}\mu \leqslant M^p.$$

- 目标: $\forall g \in L_q$,

$$\text{当 } n \text{ 充分大时}, \ \left|\int_X (f_n - f) g \mathrm{d}\mu\right| < \varepsilon.$$

- $\forall g \in L_q$，令 $A_k := \{\frac{1}{k} \leqslant |g|^q \leqslant k\}$，

$$\int_X (f_n - f) g \mathrm{d}\mu = \int_X (f_n - f) g \mathbf{I}_{A_k} \mathrm{d}\mu + \int_X (f_n - f) g \mathbf{I}_{A_k^c} \mathrm{d}\mu.$$

- $\forall \varepsilon$，$\exists k$ 使得

$$|\star\star| \leqslant \|f_n - f\|_p \cdot \|g \mathbf{I}_{A_k^c}\|_q \leqslant 2M\varepsilon, \quad \forall n.$$

- 理由：由LDC，

$$\int_X |g|^q \mathbf{I}_{A_k^c} \mathrm{d}\mu \to \int_X |g|^q \mathbf{I}_{\{|g|=0,\infty\}} \mathrm{d}\mu = 0.$$

- $g \in L_q \Rightarrow \exists \delta > 0$ 使得:

$$\text{若 } \mu(D) < \delta, \text{ 则 } \|g\mathbf{I}_D\|_q < \varepsilon.$$

- $\mu(A_k) < \infty$:

$$\frac{1}{k}\mu(A_k) \leqslant \int_X |g|^q \mathbf{I}_{A_k} \mathrm{d}\mu \leqslant \|g\|_q^q.$$

- 于是, $(A_k, A_k \cap \mathscr{F}, \mu)$ 上, $f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{\text{a.u.}} f$. 因此,

$$\exists B \subseteq A_k \text{ 使得 } \mu(A_k \backslash B) < \delta \text{ 且 } f_n \overset{B}{\rightrightarrows} f.$$

- 因此, $\|g\mathbf{I}_{A_k\backslash B}\|_q < \varepsilon$. 从而,

$$\left|\int_X (f_n - f) g \mathbf{I}_{A_k\backslash B} \mathrm{d}\mu\right| < \|f_n - f\|_p \cdot \|g\mathbf{I}_{A_k\backslash B}\|_q \leqslant 2M\varepsilon.$$

- $\exists B \subseteq A_k = \{\frac{1}{k} \leqslant |g|^q \leqslant k\}$ 使得 $f_n \overset{B}{\rightrightarrows} f$.
- $\forall \hat{\varepsilon} > 0$, $\exists N$ 使得当$n \geqslant N$ 时, $\sup\limits_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| < \hat{\varepsilon}$.
- 取$\hat{\varepsilon} = \varepsilon / (k^{\frac{1}{q}} \mu(A_k))$. 则

$$\left|\int_X (f_n - f) g \mathbf{I}_B \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \sup_{x \in B} |f_n(x) - f(x)| \cdot k^{\frac{1}{q}} \mu(A_k) < \varepsilon.$$

## 定理 (定理3.3.11)

设$f, f_1, f_2, \cdots \in L_1$. 则(0) $\overset{(i)}{\Rightarrow}$ (1) $\overset{(ii)}{\Rightarrow}$ (2) $\overset{(iii)}{\Rightarrow}$ (3).

(0) $\|f_n\| \to \|f\|$ 且$f_n \xrightarrow{\text{a.e.}} f$ (或$f_n \xrightarrow{\mu} f$ );

(1) $f_n \xrightarrow{L_1} f$; (2) $f_n \xrightarrow{(w)L_1} f$; (3) $\int_A f_n \mathrm{d}\mu \to \int_A f \mathrm{d}\mu$, $\forall A \in \mathscr{F}$.

- 证: (i) 由定理3.3.9知.

  (ii) $\left|\int_X f_n g \mathrm{d}\mu - \int_X f g \mathrm{d}\mu\right| \leqslant \|g\|_\infty \int_X |f_n - f| \mathrm{d}\mu \to 0$.

  (iii) 取$g = \mathbf{I}_A$ 即可.

- 推论3.3.12. 设$1 \leqslant p < \infty$. 则$f_n \xrightarrow{L_p} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{(w)L_p} f$.

- 证: $p = 1$ ✓. 设$p > 1$. $\|f_n\|_p \leqslant \|f\|_p + 1$, $\forall n \geqslant N$, 故

$$\|f_n\|_p \leqslant \max\{\|f_1\|_p, \cdots, \|f_N\|_p, \|f\|_p + 1\} =: M, \ \forall n.$$

由定理3.3.10 知结论成立.

## §3.4 概率空间的积分

- 设$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是概率空间. $f$ 是随机变量(r.v.).
- $\mathrm{E}f = \int_\Omega f \mathrm{d}P$.
- $L_p = L_p(\Omega, \mathscr{F}, P)$.

## 定理 (定理3.4.2)

设$0 < s < t < \infty$. 则$L_t \subseteq L_s$. 又若$s \geqslant 1$, 则$\|f\|_s \leqslant \|f\|_t$, $\forall f \in L_t$, 且等号成立当且仅当$f$ a.s. 为常数.

- 设$\|f\|_t < \infty$. 取$p := \frac{t}{s}$, $q := \frac{t}{t-s}$. 则

$$\int_X |f|^s \cdot \mathbf{1} \mathrm{d}P \leqslant \||f|^s\|_p \|\mathbf{1}\|_q = (\mathrm{E}|f|^{sp})^{\frac{1}{p}} = \left(\mathrm{E}|f|^t\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- 因此, $\|f\|_s < \infty$. 故$L_t \subseteq L_s$.
- 又若$s \geqslant 1$. 则

$$\|f\|_s^s \leqslant (\|f\|_t)^{\frac{t}{p}} = \|f\|_t^s \Rightarrow \|f\|_s \leqslant \|f\|_t.$$

- 等号成立当且仅当$\alpha f = \beta \mathbf{1}$, 即$f = \frac{\beta}{\alpha}$ a.s.

- 设$0 < p < \infty$, $f \in L_p$, 称$\mathrm{E}f^p$ 为$f$ 的$p$ 阶矩.
- 设$k \geqslant 1$, $f \in L_k \subseteq L_1$. 称$\mathrm{E}(f - Ef)^k$ 为$f$ 的$k$ 阶中心矩.
- 设$f \in L_2$. 称$\mathrm{E}(f - Ef)^2$ 为$f$ 的方差, 记为$\mathrm{var}(f)$.

- 以下假设$\{f_t, t\in T\}$ 是一族r.v..
- 定义3.4.2. 若$\forall\varepsilon>0$, $\exists\lambda>0$ 使得

$$\mathrm{E}|f_t|\mathbf{I}_{\{|f_t|>\lambda\}}<\varepsilon,\ \ \forall t\in T,$$

则称$\{f_t, t\in T\}$ 一致可积.

- 定义3.4.2(续). 若$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$ 使得$\forall A\in\mathscr{F}$,

$$P(A)<\delta\Rightarrow\mathrm{E}|f_t|\mathbf{I}_A<\varepsilon,\ \ \forall t\in T.$$

则称$\{f_t, t\in T\}$ 绝对连续.

## 定理 (定理3.4.3)

一致可积 iff 绝对连续且在$L_1$ 中有界.

- $\Rightarrow$: 设$\{f_t, t\in T\}$ 一致可积. 则$\forall A\in\mathscr{F}$, $\lambda>0$,

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|f_t|\mathbf{I}_A =&\mathrm{E}|f_t|\mathbf{I}_{A\cap\{|f_t|\leqslant\lambda\}}+\mathrm{E}|f_t|\mathbf{I}_{A\cap\{|f_t|>\lambda\}}\\ \leqslant&\lambda P(A)+\mathrm{E}|f_t|\mathbf{I}_{\{|f_t|>\lambda\}}.\end{aligned}$$

- 取$A=X$ 知$\exists\lambda>0$ 使得$\mathrm{E}|f_t|\leqslant\lambda+\frac{\varepsilon}{2}$, $\forall t\in T$.
- 取$\delta=\frac{\varepsilon}{2\lambda}$. 则当$P(A)<\delta$ 时, $\mathrm{E}|f_t|\mathbf{I}_A\leqslant\varepsilon$, $\forall t\in T$.
- $\Leftarrow$: $\lambda P(|f_t|>\lambda)\leqslant\mathrm{E}|f_t|\mathbf{I}_{\{|f_t|>\lambda\}}\leqslant\mathrm{E}|f_t|\leqslant M$, $\forall t\in T$.
- 当$\lambda>\frac{M}{\delta}$ 时, $P(|f_t|>\lambda)\leqslant\delta$, 故 $\mathrm{E}|f_t|\mathbf{I}_{\{|f_t|>\lambda\}}\leqslant\varepsilon$, $\forall t\in T$.

## 定理 (定理3.4.5)

设$0<p<\infty$, $\{f_n\}\subseteq L_p$ 且$f_n \xrightarrow{P} f$. 则下列说法等价:
(1) $\{|f_n|^p\}$ 一致可积; (2) $f_n \xrightarrow{L_p} f$; (3) $f\in L_p$ 且$\|f_n\|_p \to \|f\|_p$.

- 往证$(1) \overset{(i)}{\Rightarrow} (2) \overset{\checkmark}{\Leftrightarrow} (3) \overset{(ii)}{\Rightarrow} (1)$.
- (i). $f\in L^p$: $\exists$ 子列$f_{n'} \xrightarrow{\text{a.s.}} f$.

$$\mathrm{E}|f|^p \leqslant \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}|f_n|^p < \infty,\ (\{|f_n|^p\} \text{ 在} L_1 \text{ 中有界}).$$

- $f_n \xrightarrow{L_p} f$:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|f_n-f|^p \leqslant& \varepsilon^p + \mathrm{E}|f_n-f|^p \mathbf{I}_{\{|f_n-f|>\varepsilon\}} \\ \leqslant& \varepsilon^p + C_p\mathrm{E}|f_n|^p\mathbf{I}_{A_n} + C_p\mathrm{E}|f|^p\mathbf{I}_{A_n}.\end{aligned}$$

$(P(A_n)\to 0$, $\{|f_n|^p\}$ 绝对连续.)

- (ii) 引理3.4.4. 若$f_n \xrightarrow{P} f$, 则$\forall 0 < p < \infty$,

$$|f_n|^p \mathbf{I}_{\{|f_n| \leqslant \lambda\}} \xrightarrow{P} |f|^p \mathbf{I}_{\{|f| \leqslant \lambda\}}, \quad \forall \lambda \in C(F_{|f|}).$$

- 由有界收敛定理, $\mathrm{E}\star \to \mathrm{E}\star$.
- 又$\|f_n\|_p \to \|f\|_p$, 故

$$\mathrm{E}|f_n|^p \mathbf{I}_{\{|f_n| > \lambda\}} \to \mathrm{E}|f|^p \mathbf{I}_{\{|f| > \lambda\}}, \quad \forall \lambda \in C(F_{|f|}).$$

- $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \lambda_0 \in C(F_{|f|})$ 使得$\mathrm{E}|f|^p \mathbf{I}_{\{|f| > \lambda_0\}} < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是$\exists N$ 使得

$$\mathrm{E}|f_n|^p \mathbf{I}_{\{|f_n| > \lambda_0\}} < \varepsilon, \quad \forall n \geqslant N.$$

- 取$\lambda > \lambda_0$ 使得$\max\limits_{1 \leqslant n \leqslant N} \mathrm{E}|f_n|^p \mathbf{I}_{\{|f_n| > \lambda\}} < \varepsilon$ 即可.

## 引理 (引理3.4.4)

若$f_n \xrightarrow{P} f$, 则$\forall 0 < p < \infty$,

$$|f_n|^p \mathbf{I}_{\{|f_n| \leqslant \lambda\}} \xrightarrow{P} |f|^p \mathbf{I}_{\{|f| \leqslant \lambda\}}, \quad \forall \lambda \in C(F_{|f|}).$$

- 不妨设$f_n, f \geqslant 0$: $||f_n| - |f|| \leqslant |f_n - f| \Rightarrow |f_n| \xrightarrow{P} |f|$.
- $\{|\star - \star| > \varepsilon\} \subseteq A_n \cup B_n$,

$$A_n = \{f_n \leqslant \lambda\} \Delta \{f \leqslant \lambda\},$$
$$B_n = \{f_n, f \leqslant \lambda \text{ 且 } |f_n^p - f^p| > \varepsilon\}.$$

- $P(B_n) \to 0$:

  $x \mapsto x^p$, $x \in [0, \lambda]$ 一致连续. 故$B_n \subseteq \{|f_n - f| > \kappa_{\varepsilon,\lambda}\}$.

- $P(A_n) \to 0$:

$$A_n \subseteq \{\lambda - \delta < f \leqslant \lambda + \delta\} \cup \{|f_n - f| \geqslant \delta\}.$$