第一章、可测空间和可测映射

§1.1 集合及其运算

1.定义

- 空间(全集): X, 非空.
- 元素(点): $x, y, \cdots$.
- 集合(子集): $A, B, \cdots$,　空集: $\varnothing$.
- 符号:

$$x \in A,\ x \notin A,\ x \in A^c, A \subseteq B, A \cup B,\ AB = A \cap B,$$

$$B \backslash A \ (\text{为强调} A \subseteq B, \text{可用} B - A),\ A \Delta B.$$

- 交换律、结合律、分配律.
- 不交: $A \cap B = \varnothing$.　为强调不交, 可用$A + B$.

- 一族集合$\{A_t, t\in T\}$:

$$\bigcup_{t\in T} A_t := \{x : \exists t\in T \text{ 使得 } x\in A_t\},$$
$$\bigcap_{t\in T} A_t := \{x : x\in A_t,\ \forall t\in T\}.$$

- 两两不交: $A_t\cap A_s=\varnothing, \forall s\neq t.$

  为强调两两不交，可用$\sum_{n=1}^{N} A_n$ 或$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$.

- 对偶律(De-Morgan 法则):

$$\left(\bigcup_{t\in T} A_t\right)^c=\bigcap_{t\in T} A_t^c,\quad \left(\bigcap_{t\in T} A_t\right)^c=\bigcup_{t\in T} A_t^c.$$

- 单调(的集合)序列:

$$\text{非降, } A_n \uparrow: \quad A_n \subseteq A_{n+1}, \ \forall n;$$
$$\text{非增, } A_n \downarrow: \quad A_n \supseteq A_{n+1}, \ \forall n.$$

- 单调序列的极限:

$$\text{若 } A_n \uparrow, \text{ 则 } \lim_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$
$$\text{若 } A_n \downarrow, \text{ 则 } \lim_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

- 任意序列的上极限:

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

$$= \{x : \exists n_1 < n_2 < \cdots \text{使得} x \in A_{n_r}, \forall r \geqslant 1\} = \{A_n \text{ i.o.}\}.$$

- 任意序列的下极限:

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k = \{A_n^c \text{ f.o.}\}.$$

- 若上、下极限相等, 则称该序列的极限存在, 并记

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n.$$

§1.2 集合系

- 集合系: $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \cdots$
- π 系: $\mathscr{P}$ 非空; 对交运算封闭, 即,

$$A, B \in \mathscr{P} \Rightarrow A \cap B \in \mathscr{P}.$$

- 例1. $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{P}_{\mathbb{R}} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.
- 半环: $\mathscr{Q}$ 是π 系, 若$A, B \in \mathscr{Q}$ 且$A \supseteq B$, 则存在有限个两两不交的$C_1, \cdots, C_n \in \mathscr{Q}$ 使得

$$A \backslash B = \bigcup_{k=1}^{n} C_k = \sum_{k=1}^{n} C_k.$$

- 例2. $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{Q}_{\mathbb{R}} = \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$. (注: $\varnothing \in \mathscr{Q}$.)
- ⋆⋆ 可去掉. (习题一、4)

- 环: $\mathscr{R}$ 非空, 对并、差运算封闭, 即

$$A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A \cup B,\ A \backslash B \in \mathscr{R}.$$

- 例4. $X = \mathbb{R}$, $\mathscr{R} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\bigcup_{k=1}^{n} (a_k, b_k] : a_k, b_k \in \mathbb{R}, \forall k\}$.
- 代数、域: $\mathscr{A}$ 是π 系, $X \in \mathscr{A}$, 且对补运算封闭, 即

$$A \in \mathscr{A} \Rightarrow A^c \in \mathscr{A}.$$

- 命题1.2.1. 半环是π 系, 环是半环, 代数是环.
- 验证$\mathscr{R}$ 为π 系: $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$.
- 证: $A \cup B = (A^c \cap B^c)^c$, $A \backslash B = A \cap B^c$.
- 环= 半环 & 对并运算封闭, 代数= 环 & 含X(习题一、6).

- 单调系: 若$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{M}$ 且A_n 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n \in \mathscr{M}$.
- λ 系:

$$X \in \mathscr{L}; \qquad A, B \in \mathscr{L} \text{ 且 } A \supseteq B \Rightarrow A \backslash B \in \mathscr{L};$$
$$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{L} \text{ 且 } A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathscr{L}.$$

- σ 代数(σ 域):

$$X \in \mathscr{F}; \qquad A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F};$$
$$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}.$$

- 命题1.2.2. λ 系是单调系; σ 代数是λ 系.

- 命题1.2.3. σ 代数= 代数& 单调系.
- 命题1.2.4. σ 代数= λ 系& π 系.
- 证 “$\Leftarrow$” :

$$\stackrel{\lambda系}{\Rightarrow} A^c = X\backslash A \in \mathscr{F} \stackrel{\pi系}{\Rightarrow} \text{代数} \stackrel{\lambda系}{\Rightarrow} \sigma \text{ 代数}.$$

- σ 环: $\mathscr{R}$ 非空; $A, B \in \mathscr{R} \Rightarrow A\backslash B \in \mathscr{R}$;

$$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{R} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}.$$

- 注: $\star$ 中只用验证$A_1, A_2, \cdots$ 两两不交的情形即可.
- σ 环= 环 & 单调系, σ 代数= σ 环 & 含X, (习题一、6).

- 若$\mathscr{F}$ 是X 上的σ 代数, 则称$(X,\mathscr{F})$ 为可测空间.
- 设A 是X 的非空子集, $\mathscr{E}$ 是集合系. 定义

$$A\cap\mathscr{E}:=\{A\cap E:E\in\mathscr{E}\}.$$

- 习题一、13. $(X,\mathscr{F})$ 是可测空间. A 是X 的非空子集, 则$(A,A\cap\mathscr{F})$ 为可测空间.

从初等概率论的角度看可测空间: $(X, \mathscr{F})$.

- 最小的σ 代数: $\{\varnothing, X\}$,

  最大的σ 代数: $\mathscr{T} = \mathscr{T}_X := \{A : A \subseteq X\}$.

- 有些模型中, $\mathscr{T}$ 太大.

- “可测”:

$$X \in \mathscr{F}; \qquad A \in \mathscr{F} \Rightarrow A^c \in \mathscr{F};$$

$$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{F} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}.$$

§1.3 σ 代数的生成

- $\mathscr{E}$ 是非空的集合系.
- 定义1.3.1. 称$\mathscr{G}$ 为$\mathscr{E}$ 生成的环(单调系、λ 系、σ 代数), 若: (1) $\mathscr{G} \supseteq \mathscr{E}$, (2) 对任意$\star\star$ $\mathscr{G}'$, 均有

$$\mathscr{G}' \supseteq \mathscr{E} \Rightarrow \mathscr{G}' \supseteq \mathscr{G}.$$

- $\mathscr{E}$ 生成的$\star\star$ = 包含 $\mathscr{E}$ 的最小的$\star\star$.
- 命题1.3.1. $\mathscr{E}$ 生成的$\star\star$存在.
- 证: 将包含$\mathscr{E}$ 的所有$\star\star$记为$\mathbf{A}$, 则$\mathscr{T} \in \mathbf{A}$. $\bigcap_{\mathscr{G} \in \mathbf{A}} \mathscr{G}$ 即为所求.
- 分别记为$r(\mathscr{E})$, $m(\mathscr{E})$, $l(\mathscr{E})$, $\sigma(\mathscr{E})$.

两个重要的定理及其推论.

- 定理1.3.3.

定理 (单调类定理)

若$\mathscr{A}$ 是代数，则$\sigma(\mathscr{A}) = m(\mathscr{A})$.

- 推论1.3.4. $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{M} \Rightarrow \sigma(\mathscr{A}) \subseteq \mathscr{M}$.
- 定理1.3.5.

定理 (λ-π定理)

若$\mathscr{P}$ 是π 系，则$\sigma(\mathscr{P}) = l(\mathscr{P})$.

- 推论1.3.6. $\mathscr{P} \subseteq \mathscr{L} \Rightarrow \sigma(\mathscr{P}) \subseteq \mathscr{L}$.

定理 (定理1.3.3, 单调类定理)

若$\mathscr{A}$ 是代数, 则$\sigma(\mathscr{A}) = m(\mathscr{A})$.

- $\sigma(\mathscr{A})$ 是单调系, 且$\supseteq \mathscr{A}$, 因此$\supseteq m(\mathscr{A})$.
- 反过来, 往证$m(\mathscr{A})$ 是σ 代数, 且$\supseteq \mathscr{A}$, 因此$\supseteq \sigma(\mathscr{A})$.
- $m(\mathscr{A})$ 为单调系. 故, 只需验证$m(\mathscr{A})$ 是代数.
- (1) 非空:

$$\mathscr{A}\text{是代数} \Rightarrow X \in \mathscr{A} \subseteq m(\mathscr{A}).$$

- (2) 补运算封闭: $\forall A \in m(\mathscr{A})$, $A^c \in m(\mathscr{A})$.
- 往证$\mathscr{G} \supseteq m(\mathscr{A})$,

$$\mathscr{G} := \{A : A^c \in m(\mathscr{A})\}.$$

- 往证$\mathscr{G}$ 为单调系 且$\mathscr{G} \supseteq \mathscr{A}$ ($\checkmark$, 因为$\mathscr{A}$ 为代数).
- 若$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{G}$, $A_n \uparrow A$. 则

$$A_n^c \in m(\mathscr{A}), \forall n \Rightarrow A^c = \downarrow \lim_n A_n^c \in m(\mathscr{A}).$$

- 若$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{G}$, $A_n \downarrow A$. 则

$$A_n^c \in m(\mathscr{A}), \forall n \Rightarrow A^c = \uparrow \lim_n A_n^c \in m(\mathscr{A}).$$

- (3) 交运算封闭: $\forall A \in m(\mathscr{A}), \forall B \in m(\mathscr{A}), AB \in m(\mathscr{A})$.
- $\forall A \in m(\mathscr{A}), \forall B \in m(\mathscr{A}), AB \in m(\mathscr{A})$.
- 往证: (1) $\forall A \in \mathscr{A}$, $\star$, $\star$ 成立; (2) 满足$\star$, $\star$ 的A 组成单调系.
- (1) 固定$A \in \mathscr{A}$. 往证: $\forall B \in m(\mathscr{A}), AB \in m(\mathscr{A})$. 即
  (1.1) $\forall B \in \mathscr{A}$, $\star$ 成立, ✓; (1.2) 满足$\star$ 的B 组成单调系.
- 引理: 若$\mathscr{M}$ 是单调系, 则$\forall C$, $\mathscr{G}_C$ 是单调系, 其中

$$\mathscr{G}_C := \{D : CD \in \mathscr{M}\}.$$

- 引理的证明:

$$D_n \in \mathscr{G}_C, \forall n \text{ 且 } D_n \uparrow D \quad \Rightarrow \quad CD = \uparrow \lim_n CD_n \in \mathscr{M}.$$
$$D_n \in \mathscr{G}_C, \forall n \text{ 且 } D_n \downarrow D \quad \Rightarrow \quad CD = \downarrow \lim_n CD_n \in \mathscr{M}.$$

- (3) 交运算封闭: $\forall A \in m(\mathscr{A}), \forall B \in m(\mathscr{A}), AB \in m(\mathscr{A})$.
- $\forall A \in m(\mathscr{A}), \forall B \in m(\mathscr{A}), AB \in m(\mathscr{A})$.
- 往证: (1) $\forall A \in \mathscr{A}$, $\star$, $\star$ 成立; (2) 满足$\star$, $\star$ 的A 组成单调系.
- (1) 固定$A \in \mathscr{A}$. 往证: $\forall B \in m(\mathscr{A})$, $AB \in m(\mathscr{A})$. 即
  (1.1) $\forall B \in \mathscr{A}$, $\star$ 成立, ✓; (1.2) 满足$\star$ 的B 组成单调系.
- 引理: $\mathscr{G}_C := \{D : CD \in \mathscr{M}\}$ 是单调系.
- 取$\mathscr{M} = m(\mathscr{A})$, $C = A$. 改记$D = B$, 知(1.2) ✓. 故(1) ✓.
- 取$\mathscr{M} = m(\mathscr{A})$, $C = B$, 改记$D = A$, 则满足$\star$, $\star$ 的A 组成

$$\mathscr{G} = \bigcap_{B \in m(\mathscr{A})} \mathscr{G}_B.$$

- $\mathscr{G}_B$ 是单调系, 故$\mathscr{G}$ 是单调系, 即(2) ✓.

定理 (定理1.3.5, λ-π定理)

若$\mathscr{P}$ 是π 系, 则$\sigma(\mathscr{P}) = l(\mathscr{P})$.

- $\sigma(\mathscr{P})$ 是λ 系, 且$\supseteq \mathscr{P}$, 因此$\supseteq l(\mathscr{P})$.
  反过来, 往证$l(\mathscr{P})$ 是σ 代数, 且$\supseteq \mathscr{P}$, 因此$\supseteq \sigma(\mathscr{P})$.
- 只需验证$l(\mathscr{A})$ 是π 系, 即, 对交运算$A \cap B$ 封闭. 往证

$$AB \in l(\mathscr{P}), \quad \forall A \in l(\mathscr{P}), B \in l(\mathscr{P}).$$

- 引理: 若$\mathscr{L}$ 是λ 系, 则$\forall C \in \mathscr{L}$, $\mathscr{G}_C$ 是λ 系.

$$\mathscr{G}_C := \{D : CD \in \mathscr{L}\}.$$

- (1) $\forall A \in \mathscr{P}$, $\star$, $\star$ 成立:
  (1.1) $\forall B \in \mathscr{P}$, $\star$ 成立, ✓; (1.2) $\mathscr{G}_A$ 为λ 系, ✓.
- 满足$\star$, $\star$ 的A 组成$\mathscr{G} = \bigcap_{B \in l(\mathscr{P})} \mathscr{G}_B$ 是λ 系, 故(2) ✓.

- 往证引理: $\mathscr{G}_C := \{D : CD \in \mathscr{L}\}, \forall C \in \mathscr{L}$.
- 复习λ 系的定义:

$$X \in \mathscr{L}; \qquad A, B \in \mathscr{L} \text{ 且 } A \supseteq B \Rightarrow A \backslash B \in \mathscr{L};$$

$$A_1, A_2, \cdots \in \mathscr{L} \text{ 且 } A_n \uparrow A \Rightarrow A \in \mathscr{L}.$$

- (1) $X \in \mathscr{G}_C$, 因为$CX = C \in \mathscr{L}$.
- (2) 若$D_1, D_2 \in \mathscr{G}_C$ 且$D_1 \supseteq D_2$, 则$D_1 - D_2 \in \mathscr{G}_C$:

$$CD_1, CD_2 \in \mathscr{L}, CD_1 \supseteq CD_2 \Rightarrow C(D_1 - D_2) = CD_1 - CD_2 \in \mathscr{L}.$$

- (3) 若$D_n \in \mathscr{G}_C, \forall n$ 且$D_n \uparrow D$, 则$D \in \mathscr{G}_C$:

$$CD_n \in \mathscr{L}, CD_n \uparrow \Rightarrow CD = \uparrow \lim_{n\to\infty} (CD_n) \in \mathscr{L}.$$

Borel 集.

- X 为拓扑空间, $\mathscr{O}$ 为所有开集组成的集合系.
- 称$\mathscr{B}_X := \sigma(\mathscr{O})$ 为X 上的Borel σ 代数/Borel 集合系.
  若$B \in \mathscr{B}_X$, 则称B 为Borel 集.
- 称$(X, \mathscr{B}_X)$ 为拓扑可测空间.

定理 (定理1.3.2)

若$\mathscr{Q}$ 是半环, 则

$$r(\mathscr{Q}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} A_k : A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{Q} \text{ 且两两不交} \right\}.$$

- 证: 环对并运算封闭, 故$r(\mathscr{Q}) \supseteq \mathscr{G}$.
- 反过来, 往证$\mathscr{G}$ 为环: 非空✓; 假设$A, B \in \mathscr{G}$, 往证$A \backslash B \in \mathscr{G}$.
- 于是, $A \cap B = A \backslash (A \backslash B) \in \mathscr{G}$.
- 进一步,

$$A \cup B = (A \backslash B) + (B \backslash A) + (A \cap B) \in \mathscr{G}.$$

- 往证$A\backslash B\in\mathscr{G}$: 假设$A_1,\cdots,A_n,B_1,\cdots,B_m$ 使得

$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i,\quad B=\sum_{j=1}^{m}B_j\in\mathscr{G}.$$

- $A\backslash B=\sum_{i=1}^n(A_i\backslash B)=\sum_{i=1}^n\Big(\big((A_i\backslash B_1)\backslash B_2\big)\backslash\cdots\backslash B_m\Big).$
- 往对m 用归纳法，以证明$\star=\sum_{r=1}^{n_i}C_{i,r}$，于是证毕.
- $m=1$ 时，由半环性质得证.
- $m\to m+1$:

$$\star\backslash B_{m+1}=\left(\sum_{r=1}^{n_i}C_{i,r}\right)\backslash B_{m+1}=\sum_{r=1}^{n_i}(C_{i,r}\backslash B_{m+1})=\sum_{r=1}^{n_i}\sum_{s=1}^{m_r}D_{i,r,s}.$$

§1.4 可测映射与可测函数

- 映射, $f: X \to Y$, $x \mapsto y = f(x)$.
- y: 函数值, x 处的f 值.
- 原像: $B \subseteq Y$, $\mathscr{E}$ 是Y 上的集合系,

$$f^{-1}B := \{x : f(x) \in B\}, \quad \text{也记为 } f^{-1}(B), \{f \in B\},$$
$$f^{-1}\mathscr{E} := \{f^{-1}B : B \in \mathscr{E}\}.$$

- 命题1.4.1.

$$f^{-1}\varnothing = \varnothing, \quad f^{-1}Y = X,$$
$$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}B_1 \subseteq f^{-1}B_2, \quad \left(f^{-1}B\right)^c = f^{-1}(B^c),$$
$$f^{-1}\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T} f^{-1}A_t, \quad f^{-1}\bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{t\in T} f^{-1}A_t.$$

命题 (命题1.4.2)

对Y 上的任意非空集合系$\mathscr{E}$,

$$\sigma(f^{-1}\mathscr{E}) = f^{-1}\sigma(\mathscr{E}).$$

- 证: $f^{-1}\sigma(\mathscr{E})$ 是σ 代数, 且$\supseteq f^{-1}\mathscr{E}$, 从而$\supseteq \sigma(f^{-1}\mathscr{E})$.
  反过来, 往证$f^{-1}\sigma(\mathscr{E}) \subseteq \sigma(f^{-1}\mathscr{E})$, 即,
  $$\forall B \in \sigma(\mathscr{E}) \text{ 都满足} f^{-1}B \in \sigma(f^{-1}\mathscr{E}).$$
- 重点: 往验证$\mathscr{G}$ 是σ 代数. 它 $\supseteq \mathscr{E}$, 故 $\supseteq \sigma(\mathscr{E})$.
  $$\mathscr{G} := \{B \subseteq Y : f^{-1}B \in \sigma(f^{-1}\mathscr{E})\}.$$
- 验证:
  $$f^{-1}\varnothing = \varnothing, \quad f^{-1}Y = X,$$
  $$B_1 \subseteq B_2 \Rightarrow f^{-1}B_1 \subseteq f^{-1}B_2, \quad \left(f^{-1}B\right)^c = f^{-1}(B^c),$$
  $$f^{-1}\bigcup_{t\in T} A_t = \bigcup_{t\in T} f^{-1}A_t, \quad f^{-1}\bigcap_{t\in T} A_t = \bigcap_{t\in T} f^{-1}A_t.$$

- 假设$(X,\mathscr{F})$ 与$(Y,\mathscr{S})$ 为两个可测空间, $f:X\to Y$.
- 若$f^{-1}\mathscr{S}\subseteq\mathscr{F}$, 则称$f$ 为可测映射/随机元/可测的, 记为

$$f:(X,\mathscr{F})\to(Y,\mathscr{S})\quad 或\quad (X,\mathscr{F})\xrightarrow{f}(Y,\mathscr{S})\quad 或\quad f\in\mathscr{F}.$$

- f 可测指: $f^{-1}B\in\mathscr{F},\ \forall B\in\mathscr{S}$. 等价地, $\sigma(f)\subseteq\mathscr{F}$, 其中,

$$\sigma(f):=f^{-1}\mathscr{S}$$

为使f 可测的最小σ 代数, 称为f 生成的σ 代数.

- 定理1.4.3. 设$\mathscr{E}$ 是Y 上的非空集合系. 则
$$(X,\mathscr{F})\xrightarrow{f}(Y,\sigma(\mathscr{E}))\Leftrightarrow f^{-1}\mathscr{E}\subseteq\mathscr{F}.$$
- 定理1.4.4. 若$(X,\mathscr{F})\xrightarrow{f}(Y,\mathscr{S})\xrightarrow{g}(Z,\mathscr{Z})$, 则$g\circ f$ 可测.
- 证: $\forall C\in\mathscr{Z}$, $g^{-1}C\in\mathscr{G}$, 故$(g\circ f)^{-1}C=f^{-1}(g^{-1}C)\in\mathscr{F}$.

- 广义实数: $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$.
- 序与区间: $-\infty < a < \infty, \ \forall a \in \mathbb{R}$;   如, $[-\infty, a]$.
- 四则运算: $\pm\infty \times 0 := 0$;   如, $\infty - \infty$, ∞/∞ 无意义.
- 正部与负部: $\forall a \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$a^+ = a \vee 0, \quad a^- = (-a) \vee 0.$$

- $a = a^+ - a^-, \quad |a| = a^+ + a^-$.
- 令

$$\mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}} := \sigma\left(\mathscr{B}_{\mathbb{R}} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}\right).$$

- 命题1.4.5. $\mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}} = \sigma(\{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}) = \cdots$

- 定义1.4.1. 可测函数指

$$f : (X, \mathscr{F}) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}}).$$

随机变量指

$$f : (X, \mathscr{F}) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}),$$

也称为有限的可测函数, 可测实值函数.

定理 (定理1.4.6)

$(X, \mathscr{F})$ 为可测空间.

$$f : X \to \overline{\mathbb{R}} \quad (\text{或} f : X \to \mathbb{R}),$$

则 f 为可测函数(或随机变量$r.v.$) 当且仅当

$$\{f \leqslant a\} \in \mathscr{F}, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

- r.v. 版: 令$\mathscr{E} = \mathscr{P}_{\mathbb{R}} = \{(-\infty, a] : \forall a \in \mathbb{R}\}$. 则

$$f \text{ 可测 } \text{ iff } \sigma(f) = f^{-1}\mathscr{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\left(f^{-1}\mathscr{E}\right) \subseteq \mathscr{F}$$
$$\text{iff } f^{-1}\mathscr{E} \subseteq \mathscr{F}.$$

- 可测函数版: 令$\mathscr{E} = \mathscr{P}_{\overline{\mathbb{R}}} = \{[-\infty, a] : \forall a \in \mathbb{R}\}$.

- 例1. $f:(X,\mathscr{T}_X)\to(\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ 可测.
- 例2. $f\equiv a$ 可测.
- 例3. 示性函数/指示函数$\mathbf{I}_A$ 可测, $\forall A\in\mathscr{F}$;
- 例4. 阶梯函数

$$a_1\mathbf{I}_{A_1}+\cdots+a_n\mathbf{I}_{A_n}$$

可测, 其中, $A_1,\cdots,A_n\in\mathscr{F}$ 两两不交, $a_1,\cdots,a_n\in\overline{\mathbb{R}}$.

- Borel 函数指$(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})\xrightarrow{g}(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$.

  例: 连续函数是Borel 函数.
- 例. 若f 是r.v., g 是Borel 函数, 则$g(f)=g\circ f$ 也是r.v..
- 推论1.4.7. 若$f,\ g$ 是可测函数, 则$\{f=a\},\{f<g\},\cdots\in\mathscr{F}$.

§1.5 可测函数的运算

定理 (定理1.5.1)

可测函数的四则运算(若有意义, 则)可测.

- 如: 若f, g 可测, $f+g$ 不出现$\infty+(-\infty)$ 情形, 则$f+g$ 可测.
- 证: $\forall a \in \mathbb{R}$, $\{f+g<a\} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$,

$$\begin{aligned}
A_1 &:= \{f=-\infty, g<\infty\} \cup \{f<\infty, g=-\infty\} \in \mathscr{F}, \\
A_2 &:= A \cap (\{f=\infty, g>-\infty\} \cup \{f>-\infty, g=\infty\}) = \varnothing \in \mathscr{F}, \\
A_3 &:= A \cap \{-\infty<f, g<\infty\} = \{f<a-g\} \cap \star \\
&= \left(\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (\{f<r\} \cap \{r<a-g\})\right) \bigcap \star \in \mathscr{F}.
\end{aligned}$$

定理 (定理1.5.2)

可测函数的极值与上、下极限都可测.

- 极值: 如, 若$f_1, f_2, \cdots$ 可测, 则$\inf_{n\geqslant 1} f_n$ 可测, 因为

$$\left\{\inf_{n\geqslant 1} f_n \geqslant a\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{f_n \geqslant a\}.$$

- 注: $\left\{\inf_{n\geqslant 1} f_n > a\right\} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty}\{f_n > a\} \subseteq \left\{\inf_{n\geqslant 1} f_n \geqslant a\right\}$.
- 特别地, f 可测, 则$f^+ = f \vee 0$ 与$f^- = (-f) \vee 0$ 可测.
- 极限:

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{N\geqslant 1} \inf_{n\geqslant N} f_n.$$

- X 的有限分割指: $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 满足

$$A_1, \cdots, A_n \subseteq X, \text{两两不交, 且} \bigcup_{i=1}^n A_i = X.$$

- $(X, \mathscr{F})$ 的有限可测分割指:

$$\text{进一步, } A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{F}.$$

- 简单函数指:

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{I}_{A_i},$$

其中, $\{A_1, \cdots, A_n\}$ 为有限可测分割, $a_1, \cdots, a_n$ 是实数.

- 有界函数指: $|f(x)| \leqslant M$, $\forall x \in X$.
- 点点收敛$f_n \to f$ 指:

$$f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in X.$$

定理 (定理1.5.3)

若f 可测，则存在简单的$f_1, f_2, \cdots$ 使$f_n \to f$. (a) 若$f \geqslant 0$, 则$f_n \geqslant 0$, $\forall n$ 且$f_n \uparrow f$; (b) 若f 有界，则$f_n \rightrightarrows f$.

- 设$f \geqslant 0$. 取

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{I}_{\{\frac{k}{2^n} \leqslant f < \frac{k+1}{2^n}\}} + n\mathbf{I}_{\{f \geqslant n\}}.$$

- $f_n \geqslant 0$, $f_n \uparrow$. 并且$f(x) \to f(x)$, $\forall x \in X$, 因为

$$\begin{aligned} 0 \leqslant f(x) - f_n(x) \leqslant 1/2^n, &\quad \text{当 } f(x) < n; \\ n = f_n(x) \leqslant f(x), &\quad \text{当 } f(x) \geqslant n. \end{aligned}$$

- 又若f 有界 M, 则$\star$, $\forall n \geqslant M$, 故$f_n \rightrightarrows f$.
- f 可测, 则$f = f^+ - f^-$, 考虑$f^\pm$ 即可.

定理 (定理1.5.4)

设$g:(X,\mathscr{F})\to(Y,\mathscr{S})$. 则

$$(X,g^{-1}\mathscr{S})\xrightarrow{h}(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})\quad \textit{iff}\quad h=f\circ g,\ \text{其中},(Y,\mathscr{S})\xrightarrow{f}(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}}).$$

- 注: $(\mathbb{R},\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ 可改为$(\overline{\mathbb{R}},\mathscr{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ 或$([a,b],[a,b]\cap\mathscr{B}_{\mathbb{R}})$.
- $\Leftarrow\checkmark$, 往证$\Rightarrow$.
- 典型方法: 为证$\star\star$, $\forall h\in g^{-1}\mathscr{S}$, 往依次验证$\star\star$, $\forall h\in\mathcal{H}_i$:

$\mathcal{H}_1$: 示性函数; $\quad h=\mathbf{I}_A,\ \forall A\in g^{-1}\mathscr{S}$;

$\mathcal{H}_2$: 非负简单函数; $\quad h=a_1\mathbf{I}_{A_1}+\cdots+a_n\mathbf{I}_{A_n},\ a_i\geqslant 0;\ \forall i$;

$\mathcal{H}_3$: 非负可测函数; $\quad h_n\uparrow h$;

$\mathcal{H}_4$: 可测函数; $\quad h=h^+-h^-$.

- 注: $\mathcal{H}_1\to\mathcal{H}_2\to\mathcal{H}_3$, 需$\star\star$ 对非负线性运算封闭, 极限封闭.

定理 (定理1.5.4 之必要性)

$(X, g^{-1}\mathscr{S}) \xrightarrow{h} (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}) \Rightarrow h = f \circ g$, 其中, $(Y, \mathscr{S}) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$.

- $\mathcal{H}_1$: 设$h = \mathbf{I}_A$, 其中$A \in \sigma(g)$. 则

$$A = g^{-1}B,\ B \in \mathscr{S} \Rightarrow f = \mathbf{I}_B \text{ 即可.}$$

- $\mathcal{H}_2$: 设h 非负简单, 即, $h = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{I}_{A_i}$, 其中$\{A_1, \cdots, A_n\}$ 为可测分割, $a_1, \cdots, a_n$ 两两不等. 则

$$\exists B_i \in \mathscr{S} \text{ 使} A_i = \{h = a_i\} = g^{-1}B_i \Rightarrow h = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{I}_{B_i}\right) \circ g.$$

- $\mathcal{H}_3$: 设h 非负可测. $\exists h_n$ 非负简单, $h_n \uparrow h$.

$$h_n = f_n \circ g, \ \forall n \Rightarrow h = f \circ g,$$

$$\text{其中,} \ f(y) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(y), & \text{若极限存在且有限,} \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- $\mathcal{H}_4$: 设h 可测, 则$h = h^+ - h^- = (f_+ - f_-) \circ g$.

- 一般地, 为验证$\star\star$, $\forall h \in \mathcal{H}_1$. 即, $h = \mathbf{I}_A$, $\forall A \in \mathscr{F}$. 往验证:

$$\mathscr{G} := \{A \subseteq X : \mathbf{I}_A \text{ 满足 } \star\star\} \supseteq \mathscr{F}.$$

- 找代数$\mathscr{A} \subseteq \mathscr{G}$ 使得$\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{A})$, 并证明$\mathscr{G}$ 是单调系.
- 或, 找π 系$\mathscr{P} \subseteq \mathscr{G}$ 使得$\mathscr{F} = \sigma(\mathscr{P})$, 并证明$\mathscr{G}$ 是λ 系.

- 非负广义实值函数组成的单调类指:

$$f, g \in \mathcal{M}, a, b \in \mathbb{R},\ af + bg \geqslant 0 \Rightarrow af + bg \in \mathcal{M};$$

$$f_1, f_2, \cdots \in \mathcal{M},\ f_n \uparrow f \Rightarrow f \in \mathcal{M}.$$

- 定理1.5.5. 设$\mathscr{A}$ 是代数, $\mathcal{M}$ 是$\star\star$. 若$\mathbf{I}_A \in \mathcal{M}, \forall A \in \mathscr{A}$, 则$(X, \sigma(\mathscr{A}))$ 上的非负可测函数均在$\mathcal{M}$ 中.
- $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{M}$: $\mathscr{G}$ 是单调系,

$$\mathscr{G} := \{A \subseteq X : \mathbf{I}_A \in \mathcal{M}\} \supseteq \mathscr{A} \Longrightarrow \mathscr{G} \supseteq \sigma(\mathscr{A}).$$

- $\to \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3$: $\mathcal{M}$ 对非负线性运算封闭.

- 非负广义实值函数组成的λ 类指:

$$1 \in \mathcal{L};$$

$$f, g \in \mathcal{L},\ a, b \in \mathbb{R},\ af + bg \geqslant 0 \Rightarrow af + bg \in \mathcal{M};$$

$$f_1, f_2, \cdots \in \mathcal{L},\ f_n \uparrow f \Rightarrow f \in \mathcal{L}.$$

- 定理1.5.6. 设$\mathscr{P}$ 是π 系, $\mathcal{L}$ 是$\star\star$. 若$\mathbf{I}_A \in \mathcal{L}, \forall A \in \mathscr{P}$, 则$(X, \sigma(\mathscr{P}))$ 上的非负可测函数均在$\mathcal{L}$ 中.

- $\mathcal{H}_1 \subseteq \mathcal{M}$: $\mathscr{G}$ 是λ 系,

$$\mathscr{G} := \{A \subseteq X : \mathbf{I}_A \in \mathcal{L}\} \supseteq \mathscr{P} \Longrightarrow \mathscr{G} \supseteq \sigma(\mathscr{P}).$$

- $\to \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_3$: $\mathcal{L}$ 对非负线性运算封闭.